5.1

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

NOVA ALGEBRÆ ELEMENTA.

Google



And Mullar Sculp.

ELEMENTA ALGEBRÆ PRO NOVIS TYRONIBUS

tumultuario ſtudio

CONCINNATA,

AUCTORE

NICOLAO DE MARTINO

In Illuſtri Lyceo Neapolitano

MATHEMATUM PROFESSORE.

TOMUS I.

Continens librum primum de calculo litterali, ſive ſpecioſo.

della Libraria dei Padri Minimi del Con-vento di S. Giuseppe della città di Firenze. Ex dono Fr. Philippi Auumini 1711

NEAPOLI MDCCXXV.
Ex Typographia Felicis Moſca,
EXPENSIS BERNARDINI GESSARI
Superioribus annuentibus.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ILLUSTR.^{MO}, ET NOBILISS.^{MO} VIRO

DOMINO

D. ALEXANDRO

RICCARDO,

In Supremo Cæſaris Conſilio Regenti, & Fiſci Patrono.

MOS jamdudum invaluit apud Bibliopolas, ut quum bono publico opus aliquod à Celeberrimo quodam Auctore compoſitum, in lucem ab ipſis eſſet

emittendum, illud ſubmitterent, ac nuncuparent nomini alicujus, qui tum ſupremâ aliquâ dignitate præfulgeat, tum in Republicâ litterariâ ſummam auctoritatem obtineat. Horum utrumque, quàm rarò accidat, ut in uno, eodemque Viro conſiſtere videatur, explorata profectò res eſt. Qui enim litteris, iiſque gravioribus dant operam, aliàs ipſorum mente avocatâ, vix in publicis negotiis obeundis, & ad Rempublicam adminiſtrandam videntur accomodati. Qui verò dignitate, honoribuſq; pręcellunt, faſtu ſublimes, arroganteſque ſibi, ſuiſque Imaginibus indignum putant litteras profiteri. Tu autem, Vir Illuſtriſſime, communi omnium ſuffragio,

unus

unus inter pauciſſimos es, in quo egregiâ emulatione utrumque fulget, ac ſplendet. Tibi enim ita in primis litteræ ſunt charæ, ut dum ab Auguſtiſſimo noſtro Principe aliis ſubinde, atque aliis dignitatibus identidem inſigniris, earum non modò non obliviſceris, ſed eas ita foves, ac excolis, ut earundem ſtudioſis materiam pariter, & ſtimulos ſubdas. Tuque etiam talem mentis aciem, & judicium acerrimum à Naturâ ſortitus es, ut dum optimarum litterarum ſtudio ſeriò operam navas, graviora Invictiſſimi noſtri Principis negotia pari diligentiâ geris, ac tractas. Quemadmodum verò in his obeundis non privatæ ambitioni, ſed publicis utilitatibus ſer-

vis; nec aliam laborum tuorum metam tibi proponis, quàm ipſius Principis famam, & gloriam. Ita in litteris excolendis nihil ad fumum, & oſtentationem, ſed omnia ad veritatem refers; nec alium exinde fructum colligere ſtudes, quàm plenam, ſolidamque veritatis cognitionem, quæ adeo tibi cordi eſt, ut non verearis maxima quæque pericula ſubire, quò eam defenderes, ac vindicares adverſus quoſcumque, eandem viribus omnibus ſupprimere ſtudentes. Neque enim vana, & ſuperficiaria eſt ea, quam profiteris litteratura, quippe qui unà cum litteris, quas vocant humanis, & multiplici linguarum diverſitate, quas inter potiſſimum eminent hetruſca, la-

tina,

tina, græca, & hæbraica, conjungis etiam ſtudium tum Philoſophiæ, aliarumque ſcientiarum, quæ huic ancillantur; tum Theologiæ, aliarumq; diſciplinarum, quæ ad hanc referuntur; tum denique Artis illius, quæ bonum, & æquum reſpiciens, Juriſprudentia communiter audit. Hæc igitur, quum ita ſint, non alium te aptiorem potueram invenire, ſub cujus auſpiciis nova iſta Algebræ Elementa poſſent, citra omnem invidiæ morſum, tutò, feliciterque prodire. Nec verebor rem tibi ingratam facturum, quod ea nomini tuo nuncupata in lucem emittam; tum propter eorum argumentum, quod magnitudine, & dignitate ſuâ ſatis commendari non poteſt; tum pro-

pter

pter Auctorem ipſum, quem eximia ejus in ſublimioribus hiſce ſtudiis peritia omni fecit laude majorem. Hoc unum etiam, atque etiam abs te rogo, ut quod tibi in præſentiarum offerro, velut perpetuum meæ erga te obſervantiæ τεκμήριον velim accipias; quandoquidem ad id non aliud me adegit, quàm ut ſingulis teſtatum facerem, quantâ cum veneratione ſim.

Tui

Addictiſſimus Famulus
Bernardinus Geſſari.

AD LECTOREM.

Quæ me ad hoc opus conſcribendum potiſſimum impulerint, viſum eſt paucis hic tibi, Benevole Lector, aperire. Parabatur Typis Neapolitanis nova editio Elementorum Arithmeticæ Patris Tacqueti. Hæc ut accuratior prodiret, ac emendatior, rogavit me Bibliopola, ut ei, quantum poſſem, operam darem; ſed onus mihi etiam adjunxit, ut ſi quid eidem adjiciendum exiſtimarem, illud adjicere non gravarer. Hinc prima hujus operis origo nata. Quum enim animo mecum re-

vol-

volverem, ac ſedulò cogitarem, quid novæ illi editioni adjungere poſſem, quod ſtudioſæ Juventuti aliquid utilitatis afferret, & ab ea expeteretur; nihil utiliùs, nihil optabilius ſe ſe obtulit, quàm ut brevi quodam ſpecimine Algebræ numeroſæ editionem illam ornarem. Jam, quum ad ſpecimen illud conſcribendum me accinxerim, ſtatim novi aliquid ampliùs me confecturum, quàm optabat Bibliopola. Neque enim aliud hìc expetebat, quàm ut aliquid adjicerem, quod viginti, aut triginta paginis poſſet includi, ne libri moles, ac volumen admodum excreſceret. Unde, quia ſpecimen, quod Animo revolvebam, multò plures, quàm triginta paginas exigebat, loco ejus opuſculum de permutationibus, & combina-

tio-

tionibus compoſui , eoque paſſus ſum , ut meo nomine nova illa editio auctior prodiret . Interim Bibliopola, occaſionem nactus , à rogando non deſtitit , ut ſpecimen Algebræ numeroſæ , quod mente conceptum habebam , conſcribere non gravarer , quo nempe poſſet illud ſeparatim in lucem emitti. Hinc itaque factum, ut non Numeroſæ tantùm , ſed totius Algebricæ Scientiæ Elementa componere fuerim aggreſſus . Nam, quum ſeparatim opus in lucem eſſet emittendum, viſum fuit non abs re futurum Algebram univerſam eo in opere comprehendere. Hanc porro provinciam eò lubentiùs ſuſcepi , quia nemo hactenus , quem ſciam , Scientiæ hujus propemodum divinæ Elementa ſic conſcribere curavit , ut ad om-

omnes laboris ſui fructum aliquem optaverit pervenire. Cui & alia acceſſit quoque ratio, eaque fortaſſis præcipua, ſcilicet, ut Tyronibus noſtris mathematicis conſulerem, qui inopiâ librorum parùm, aut nihil in hiſce ſtudiis proficiebant. Habet quippe hæc noſtra Civitas, non ſecùs, ac Anglia, Gallia, *vel* Germania, *ſuos, quos oſtentat Chriſtophoros,* Galitias, *Cyrillos, & Arianos; nec iidem deſunt inter Patricios. Sed tantis Ducibus vix unus, aut alter inter Juvenes ad ſummæ hujus diſciplinæ faſtigium pervenire viſus eſt; non quidem culpâ illorum, qui tantam in docendo facilitatem oſtendunt, quantam in agendo humanitatem; nec culpâ ipſius Juventutis, quæ ut ad hæc ſtudia parata, ſic ad eadem apta*

nata

nata deprehenditur ; ſed unicè, quia non adeo facile erat ſtudioſis, libros ad hæc ſtudia collimantes ſibi comparare. Tantum itaque abeſt, ut in his concinnandis elementis, iiſdemque in lucem evulgandis alicujus gloriolæ cupido me adduxerit, ut libenter ab iis me abſtinuiſſem, niſi hæc omnia illud mihi ſuaſiſſent. Cæterùm ſi noverim, Candide Lector, non ingrato animo te ſuſcepturum hoc qualecumque meum opus, alia & fortaſſe majora non gravabor in lucem emittere. Jam enim triennium eſt, & quod excurrit, ex quo opus compoſui, à pluribus quidem per partes tentatum, ſed à nemine, quem ſciam, omnibus ſuis numeris abſolutum, nimirum tractatum integrum de naturâ, & proprietatibus curvarum.

rum.

rum. Etſi enim Recentiores longe diligentiùs, quàm Veteres, excoluerint partem iſtam Geometriæ, quæ de lineis curvis ediſſerit; ei tamen id incommodi accidit, quod quæcumque ad eam pertinent, hinc inde apud varios Auctores, diverſis methodis tradita, ſparſa reperiantur. Itaque, ut pars iſta Geometriæ pervia, & cuique comparabilis fieret, eam ex integro tractare ſuſcepi: unde opus compoſui, in quatuor libros diremptum, quorum primus agit de curvis geometricis, ſecundus de curvis mechanicis, tertius de calculo differentiali, & quartus, ſive poſtremus de calculo integrali. Suſcepi etiam tractatum alium phyſicomathematicum conſcribere, in quo motus corporum omnium ſic expendere mihi pro-

po-

poſui, ut quæcumque à Galilæo uſque ad noſtra tempora circà hanc materiam excogitata ſunt, ex iiſdem principiis eſſent oſtenſa, ac derivata, cujus equidem tractatus, nondum ad umbilicum perducti, ſpecimina aliquot ſub nomine Staticæ, Hydroſtaticæ, & Aeroſtaticæ brevi lucem adſpicient; quum jam primæ eorum paginæ ſub prælo reperiantur. Neque verò hìc meorum laborum finis erit. Adeo enim Mathematicarum Scientiarum cognitio me delectat, tantamque ex iis capio voluptatem, ut etſi præter meum votum aliis quoque ſtudiis, ab iis longè diſſitis, operam dare coactus ſim, Matheſi tamen numquam ſuperſedeam, ſed in eâ excolendâ quotidiè aliquid temporis ſuffurabor. Vale.

** *Omne*

Omne, quod de re bonâ dilucidè dicitur, mihi præclarè dici videtur; iſtiuſmodi autem res dicere ornatè velle, puerile eſt; planè autem, & perſpicuè expedire poſſe, docti, & intelligentis Viri.

Cic. de Finib. bon. & mal. lib. 3. cap. 5.

Digitized by Google

EMINENTISSIMO SIGNORE

Felice Moſca ſupplicando eſpone à V.Em. come deſidera dare alle ſtampe un'Opera Matematica intitolata: *Elementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario ſtudio concinnata*; compoſta dal Sig. Nicolò di Martino, Publico Lettore di Matematica in queſta Univerſità di Napoli. La ſupplica per tanto à commettere la cenſura di eſſa à chi meglio li parerà, e l'haverà à grazia, ut Deus &c.

Adm. Rev. D. Cajetanus de Mari revideat, & referat. Die 23. Jun. 1725.

ANTONIUS CAN. CASTELLI VIC. GEN.

D. Thomas Faenza pro Reverendiſs. Can. Dep.

EMINENTISSIME DOMINE

ELementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario ſtudio concinnata à D. Nicolao de Martino in Regio hujus Urbis Archigymnaſio Mathematum Profeſſore, juſſu Eminentiæ Veſtræ ſedulis cum perluſtraverim oculis, nihil non modò occurrit, quod aut fidei divinæ, aut moribus chriſtianis poſſit officere; verùm etiam magnâ animi voluptate facultatis ejus utillimas æquè, ac difficillimas præceptiones clarâ adeò, & diſtinctâ ſuſpexi methodo enucleatas, ut nullo ferè ſit cuique negotio integrum, ea inde colligere, quibus vel aditum ſibi, gradumque jaciat ad penitiores illius paſſim ſubeundos receſſus, latebraſque adſtruſiores, vel in his ipſis, ſi fortè jam appulerit, quodammodò ſpatiari: quapropter operæ pretium duxerim, publico bono in lucem edi, ſi Em.V. annuerit. Datum Neap.v.Kal.Jul. A.chriſtianæ æræ MDCCXXV.

Em. V.

Humillimus, & obſequentiſſ.famulus
Cajetanus Mari.

Attenta ſupradicta relatione Rever. D.Reviſoris, Imprimatur. Neap. 29.*Julii* 1725.

ANTONIUS CAN.CASTELLI VIC.GEN.
D.Petrus Marcus Giptius Can.Dep.

EMI-

EMINENTISSIMO SIGNORE

FElice Moſca ſupplicando eſpone à V.Em. come deſidera dare alle ſtampe un'Opera Matematica, intitolata: *Elementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario ſtudio concinnata*, compoſta da Nicolò di Martino, Publico Lettore di Matematica in queſta Univerſità di Napoli. La ſupplica pertanto à commettere la cenſura di eſſa à chi meglio li parerà, e l'averà à grazia, ut Deus &c.

Mag. A. M. D. Nicolaus Cyrillus videat, & in ſcriptis referat.

Mazzaccara Reg. Alvarez Reg.
Giovene Reg. Piſacane Reg.

Proviſum per S.Em. 4. Julii 1725.

Maſtellonus.

EMI-

EMINENTISSIME DOMINE

JUſſu Em. Tuæ legi Librum, cui Titulus: *Elementa Algebræ pro novis Tyronibus tumultuario ſtudio concinnata à Nicolao de Martino in Regiâ Univerſitate Neapolitanâ Matheſeos Profeſſore*: atque in eo nil prorſus inveni, quod Regiæ Juriſdictioni adverſetur. Imò ſummam admiratus ſum Juvenis in ſalebroſâ materiâ complanandâ diligentiam, & ἀκρίβειαν: ut Algebræ Elementa haud *tumultuario ſtudio concinnata*, ſed potiùs exactiſſimâ limâ expolita, & ad Cleanthis lucernam elaborata videantur: atque adeò non ſolùm ad Tironum manuductionem, ſed etiam ad provectiorum Geometrarum admirationem excitandam accommodata. Publici igitur juris quàm citiſſimè facienda eſſe cenſeo, ſi Eminentiæ Tuæ nutus non abfuerit. Neapoli VIII. Calend. Sextil. MDCCXXV.

Em. Tuæ

Addictiſſimus Famulus

Nicolaus Cyrillus Profeſſor Regius.

Viſa relatione imprimatur, & in publicatione ſervetur Regia Pragmatica.

MAZZACCARA REG. ALVAREZ REG.

GIOVENE REG. PISACANE REG.

Proviſum per S.Em. 30.*Julii* 1725.

Maſtellonus.

Er-

Errata graviora, quæ in hoc primo irrepſerunt libro, ſic corrigat Lector Benevolus.

IN Præfatione pag. v. lin. 2. pro *quam* leg. *quæ*. In ipſo verò Opere pag. 62. lin. 14. pro *indicem* leg. *multiplicem*. Pag. 144. lin. 13. pro $a^3 - b^3$ leg. $a^3 + b^3$. Pag. 146. lin. 19. pro $c - 3\sqrt[3]{abc}$ leg. $c + 3\sqrt[3]{abc}$. Pag. 192. in fine pro $\sqrt{a + c + 2\sqrt{ac}}$ leg. $\sqrt{a^2 + c + 2\sqrt{a^2c}}$. Pag. 226. lin. 18. pro $\sqrt{-15}$. leg. $\sqrt{15}$. Pag. 235. lin. 20. pro $\sqrt{-5 - \sqrt{3}}$ leg. $\sqrt{-5 - \sqrt{-3}}$. Pag. 322. lin. 11. pro 3 *ad* 4 leg. 4 *ad* 3. Pag. 325. lin. 9. pro *dupla* leg. *ſubdupla*. Pag. 329. lin. 4. pro $\frac{1}{4}$ leg. $\frac{1}{2}$. Pag. 360. in fine pro a^{-2} leg. a^{-1}. Pag. 362. lin. 14. pro $\frac{bc}{ac}$ leg. $\frac{bc}{a^2}$.

MONITUM I.

IN fractionibus, quæ ſunt exponentes poteſtatum imperfectarum, omiſſa eſt datâ operâ lineola, quæ inter numeratorem, & denominatorem apponi ſolet. Eam itaque calamo ſuppleat Lector Bene-

nevolus, priuſquam operis lectionem aggrediatur.

MONITUM II.

UNumquemque librum horum Elementorum in Epitomen contractum Præfationis loco exhibere viſum eſt, ut Tyrones ſemel opere perlecto poſſint Præfationes illas adire, ſi aliquid ipſis è memoriâ exciderit, quod in hiſce ſtudiis non rarò ſolet evenire.

AL

PRÆFATIO

Libri Primi Epitomem exhibens.

Quæ vulgò Algebra dicitur, eadem græcè Analyſis appellatur, velut Ars, quæ in eo, quod quæritur, inveniendo, non ſyntheſi, ſive compoſitione, ſed analyſi, ſive reſolutione procedit. Eſt autem Algebra nomen ab Arabibus derivatum, quod ſecundum vim ſuam idem audit, ac Ars reſtituendi, ſive reintegrandi. Nec equidem à munere hujus Artis iſthæc abhorret denominatio. Eſt enim ipſius hoc munus præcipuum, ut poſtquam ignota quantitas per varias operationes ſic fuerit deformata, ut æqualis notæ cuidam quantitati prodierit, debeat ex æqualita-

ce iſtâ verus illius quantitatis valor excerpi. Unde, quæ primò deformatur quantitas, eadem deinde reintegratur, ac velut in juſtum ordinem reſtituitur.

Hanc porrò Artem vocamus Algebram arabico nomine, quia tametſi apud alias quoque Nationes fuerit exculta, eam tamen ab Arabũ manibus propriè mutuati ſumus, à quibus etiam accepimus maximam partem græcæ litteraturæ. Neque enim latinas, quas habemus, verſiones Euclidis, Apollonii, Ptolomæi, aliorumque Græcorum, putandum eſt ex græcis originalibus fuiſſe primò depromptas. Nam ad noſtras manus perveniſſe priùs eorum verſiones arabicas, quàm ipsa Græcorum originalia; notius eſt, quàm ut poſſit inficiari.

Algebrâ in Europam delatâ, Itali primùm eam excoluerunt, nec ullus, opinor, erit, qui primatum iſtum Nobis audeat diſputare. Jam inter Italos primus, qui de Algebra ſcripſit, eſt Lucas Pacciolus, dictus etiam Lucas de Burgo. Et quamquam memoret ille Leonardum Piſanum, aliosque ſe antiquiores, à quibus didicerat; eorum tamen opera Typis edita non habentur. Pacciolum ſecutus eſt Stiphelius, aliique ab ipſo citati. Sed omnes

iſti

iſti iis tantùm operam collocarunt, quibus Arabes Algebram perduxerunt.

Qui Algebram evehere longiùs inter Italos ſtuduit, is omni dubio procul eſt Nicolaus Tartalea. Etſi enim reſolutionem æquationum cubicarum ſub nomine Ludovici Ferrarienſis erudito orbi impertiverit Cardanus; eam tamen Tartaleæ tribuendam eſſe, jam norunt Naſutiores. Tartaleam excipit Bombellius, qui quum docuerit, qua ratione æquationes quarti gradus ope alterius cubicæ in duas quadratas dividi queant, methodum ſimul ſuppeditavit, qua reſolutio æquationum quarti gradus poſſit obtineri.

Dum hiſce Itali, Arabum veſtigiis inſiſtentes, incumbebant, in lucem prodiit Diophantus Alexandrinus, antiquioribus quidem Græcis non accenſendus, ſed neque etiam adeo ab iis remotus, quemadmodum nonnulli ſuſpicantur. Opus iſtud Diophanteum, etſi non integrum, ſat quidem oſtendit, quouſque à Græcis perducta fuerit Algebra. Quumque voces à Diophanto uſurpatæ diverſæ ſint ab iis, quibus Arabes utebantur; conjicere licet, hos aliunde, quàm à Diophanto, Algebram accepiſſe ſuam: eoque magis, quod multò plura in Dio-

phanto reperiantur, quàm quæ Arabes Italis noſtris tradiderunt.

Horum omnium Algebra erat quidem figurata, ſive ſymbolica, ſed vix alias, quàm quantitates ignotas, ſolebant certis notis, ſive ſymbolis deſignare. Datas enim, ſive cognitas quantitates numeris tantùm exprimebant. Unde ſaltem ex hoc capite numeroſa adhuc ipſorum Algebra dici merebatur. Sub finem decimiſexti ſæculi novam in Galliâ protulit Algebræ ſpeciem Franciſcus Vieta, quæ ſcilicet alphabeti litteris quantitates omnes, ſive datas, ſive incognitas deſignabat: ex quo factum, ut Algebra litteralis, ſive ſpecioſa diceretur.

Vietam ſecuti ſunt Angli, quos inter duo potiſſimùm eminent, Oughtredus, & Harriotus. Ambo Algebram, à Vieta excogitatam, inſigniter promoverunt; ſed potiſſimùm in id operam dedit Harriotus, qui primus omnium docuit æquationes altioris gradus cõponi ex ſimplicioribus inter ſe multiplicatis, adeoque in eaſdem illas poſse reſolvi. Magnum ſanè principium, unde natura, ac proprietates æquationum omnium, velut ex fonte uberrimo, prono alveo profluunt.

Etſi autem Algebra Vietea, utpote lit-

teralis, ac ſpecioſa, univerſalior eſset eâ, quam antea obtinebat; reverâ tamen nihil aliud erat, quàm ipſa vetus Algebra, alphabeti litteris adminiſtrata. Quam enimregulam docuerunt Arabes pro reſolvendis æquationibus quadratis, eandem adhibuit quoque Vieta. Quam item tradidit Tartalea pro reſolvendis æquationibus cubicis, eandem Vieta etiam aſſumpſit. Et quam demum excogitavit Bombellius pro dividendis æquationibus quadrato-quadratis in duas, quæ tantùm quadratæ eſsent, eandem & Vieta itidem uſurpavit.

Hinc iiſdem difficultatibus, quibus vetus Algebra ſcatebat, nova etiam erat obnoxia, & ſicuti imperfecta erat olim reſolutio æquationum cubicarum ab Italis tradita, ſic etiam manſit apud Vietam. Hoc unum docuit Franciſcus Vieta, ante ipſum à nemine traditum, nimirum qua ratione linearum ope deſignari poſſint radices æquationis. Sed quoniam non aliam voluit in Geometriam lineam curvam admittere, quàm circumferentiam circuli; imperfectam quoque materiam iſtam nobis reliquit; quandoquidem dumtaxat conſtructionem exhibuit illarum æquationum, quarum radices

phanto reperiantur, quàm quæ Arabes Italis noſtris tradiderunt.

Horum omnium Algebra erat quidem figurata, ſive ſymbolica, ſed vix alias, quàm quantitates ignotas, ſolebant certis notis, ſive ſymbolis deſignare. Datas enim, ſive cognitas quantitates numeris tantùm exprimebant. Unde ſaltem ex hoc capite numeroſa adhuc ipſorum Algebra dici merebatur. Sub finem decimiſexti ſæculi novam in Galliâ protulit Algebræ ſpeciem Franciſcus Vieta, quæ ſcilicet alphabeti litteris quantitates omnes, ſive datas, ſive incognitas deſignabat: ex quo factum, ut Algebra litteralis, ſive ſpecioſa diceretur.

Vietam ſecuti ſunt Angli, quos inter duo potiſſimùm eminent, Oughtredus, & Harriotus. Ambo Algebram, à Vieta excogitatam, inſigniter promoverunt; ſed potiſſimùm in id operam dedit Harriotus, qui primus omnium docuit æquationes altioris gradus cõponi ex ſimplicioribus inter ſe multiplicatis, adeoque in eaſdem illas poſse reſolvi. Magnum ſanè principium, unde natura, ac proprietates æquationum omnium, velut ex fonte uberrimo, prono alveo profluunt.

Etſi autem Algebra Vietea, utpote lit-

teralis, ac ſpecioſa, univerſalior eſset eâ, quam antea obtinebat; reverâ tamen nihil aliud erat, quàm ipſa vetus Algebra, alphabeti litteris adminiſtrata. Quam enim regulam docuerunt Arabes pro reſolvendis æquationibus quadratis, eandem adhibuit quoque Vieta. Quam item tradidit Tartalea pro reſolvendis æquationibus cubicis, eandem Vieta etiam aſſumpſit. Et quam demum excogitavit Bombellius pro dividendis æquationibus quadrato-quadratis in duas, quæ tantùm quadratæ eſsent, eandem & Vieta itidem uſurpavit.

Hinc iiſdem difficultatibus, quibus vetus Algebra ſcatebat, nova etiam erat obnoxia, & ſicuti imperfecta erat olim reſolutio æquationum cubicarum ab Italis tradita, ſic etiam manſit apud Vietam. Hoc unum docuit Franciſcus Vieta, ante ipſum à nemine traditum, nimirum qua ratione linearum ope deſignari poſſint radices æquationis. Sed quoniam non aliam voluit in Geometriam lineam curvam admittere, quàm circumferentiam circuli; imperfectam quoque materiam iſtam nobis reliquit; quandoquidem dumtaxat conſtructionem exhibuit illarum æquationum, quarum radices cir-

alphabeti litteras exerceri. Secundus aget de problematum reſolutione ſpecioſâ, & methodum tradet inveniendi radices æquationum independenter à Geometriâ. Tertius erit veluti Iſagogicus pro intelligendâ æquationum geometricâ conſtructione, quum locorum geometricorum compoſitionem exhibeat. Et quartus demum aget de ipsâ æquationum conſtructione geometricâ, oſtendetque qua ratione radices æquationum poſſint per linearum longitudines deſignari.

Itaque primus noſtræ Algebræ liber agit de calculo litterali, ſive ſpecioſo, oſtenditque, qua ratione algorithmus quantitatum poſſit per alphabeti litteras exerceri. Quantitates Veteres deſignabant, vel per numeros, vel per longitudines linearum. Utraque deſignandi ratio ſuas habet utilitates, ſed utraque ſua etiam patitur incommoda. Utile namque eſt, quantitates per numeros deſignare, quia ſic facili negotio ad calculum poni poſſunt; diſplicet verò ex alio capite, quia per numeros non omnes quantitates exprimi queunt. Sed viciſſim utile eſt, per longitudines linearum quantitates exprimere, quia hac ratione omnes omnino quantitates poſſunt deſignari; diſpli-

plicet verò ex aliâ parte, quia quantitates ſic deſignatæ non ita facilè poſſunt ad calculum poni.

Hinc tertia quantitates deſignandi ratio excogitata, quæ habet quidem utriuſque utilitates, nullius verò incommodum patitur. Fit enim per litteras alphabeti, quibus calculus perinde perficitur, ac numeris fieri ſolet, & quibus omnes omnino quantitates peræquè deſignantur, ac lineis exprimi poſſunt. Itaque, quâ ratione quantitatum calculus fieri debeat, quum per alphabeti litteras quantitates ipſæ deſignantur, priori libro docemus. Sed in tradendis regulis hujus calculi ſupponimus, Lectores non ignorare calculum arithmeticum, ubi quantitates numeris exprimuntur, quin imò requirimus, ut in eo exercendo magnam habeant promptitudinem, ac facilitatem.

Calculum autem litteralem tradituri, illud in limine præmittimus, quod ſicuti quantitates omnes poſſunt per alphabeti litteras deſignari, ita earundem multiplices, aut partes quælibet figuris arithmeticis non incongruè deſignentur. Præmittimus, etiam, quod in calculo litterali, præter ipſas litteras, quibus quantitates exprimuntur, adhibeantur quo-

que

ce iſtâ verus illius quantitatis valor excerpi. Unde, quæ primò deformatur quantitas, eadem deinde reintegratur, ac velut in juſtum ordinem reſtituitur.

Hanc porrò Artem vocamus Algebram arabico nomine, quia tametſi apud alias quoque Nationes fuerit exculta, eam tamen ab Arabū manibus propriè mutuati ſumus, à quibus etiam accepimus maximam partem græcæ litteraturæ. Neque enim latinas, quas habemus, verſiones Euclidis, Apollonii, Ptolomæi, aliorumque Græcorum, putandum eſt ex græcis originalibus fuiſſe primò depromptas. Nam ad noſtras manus perveniſſe priùs eorum verſiones arabicas, quàm ipsa Græcorum originalia; notius eſt, quàm ut poſſit inficiari.

Algebrâ in Europam delatâ, Itali primum eam excoluerunt, nec ullus, opinor, erit, qui primatum iſtum Nobis audeat diſputare. Jam inter Italos primus, qui de Algebra ſcripſit, eſt Lucas Pacciolus, dictus etiam Lucas de Burgo. Et quamquam memoret ille Leonardum Piſanum, alioſque ſe antiquiores, à quibus didicerat; eorum tamen opera Typis edita non habentur. Pacciolum ſecutus eſt Stiphellius, aliique ab ipſo citati. Sed omnes iſti

iſti iis tantùm operam collocarunt, quibus Arabes Algebram perduxerunt.

Qui Algebram evehere longiùs inter Italos ſtuduit, is omni dubio procul eſt Nicolaus Tartalea. Etſi enim reſolutionem æquationum cubicarum ſub nomine Ludovici Ferrarienſis erudito orbi impertiverit Cardanus; eam tamen Tartaleæ tribuendam eſſe, jam norunt Naſutiores. Tartaleam excipit Bombellius, qui quum docuerit, qua ratione æquationes quarti gradus ope alterius cubicæ in duas quadratas dividi queant, methodum ſimul ſuppeditavit, qua reſolutio æquationum quarti gradus poſſit obtineri.

Dum hiſce Itali, Arabum veſtigiis inſiſtentes, incumbebant, in lucem prodiit Diophantus Alexandrinus, antiquioribus quidem Græcis non accenſendus, ſed neque etiam adeo ab iis remotus, quemadmodum nonnulli ſuſpicantur. Opus iſtud Diophanteum, etſi non integrum, ſat quidem oſtendit, quouſque à Græcis perducta fuerit Algebra. Quumque voces à Diophanto uſurpatæ diverſæ ſint ab iis, quibus Arabes utebantur; conjicere licet, hos aliunde, quàm à Diophanto, Algebram accepiſſe ſuam: eoque magis, quod multò plura in Dio-

phanto reperiantur, quàm quæ Arabes Italis noſtris tradiderunt.

Horum omnium Algebra erat quidem figurata, ſive ſymbolica, ſed vix alias, quàm quantitates ignotas, ſolebant certis notis, ſive ſymbolis deſignare. Datas enim, ſive cognitas quantitates numeris tantùm exprimebant. Unde ſaltem ex hoc capite numeroſa adhuc ipſorum Algebra dici merebatur. Sub finem decimiſexti ſæculi novam in Galliâ protulit Algebræ ſpeciem Franciſcus Vieta, quæ ſcilicet alphabeti litteris quantitates omnes, ſive datas, ſive incognitas deſignabat: ex quo factum, ut Algebra litteralis, ſive ſpecioſa diceretur.

Vietam ſecuti ſunt Angli, quos inter duo potiſſimùm eminent, Oughtredus, & Harriotus. Ambo Algebram, à Vieta excogitatam, inſigniter promoverunt; ſed potiſſimùm in id operam dedit Harriotus, qui primus omnium docuit æquationes altioris gradus cõponi ex ſimplicioribus inter ſe multiplicatis, adeoque in eaſdem illas poſse reſolvi. Magnum ſanè principium, unde natura, ac proprietates æquationum omnium, velut ex fonte uberrimo, prono alveo profluunt.

Etſi autem Algebra Vietea, utpote litte-

teralis, ac ſpecioſa, univerſalior eſset eâ, quam antea obtinebat; reverâ tamen nihil aliud erat, quàm ipſa vetus Algebra, alphabeti litteris adminiſtrata. Quam enim regulam docuerunt Arabes pro reſolvendis æquationibus quadratis, eandem adhibuit quoque Vieta. Quam item tradidit Tartalea pro reſolvendis æquationibus cubicis, eandem Vieta etiam aſſumpſit. Et quam demum excogitavit Bombellius pro dividendis æquationibus quadrato-quadratis in duas, quæ tantùm quadratæ eſsent, eandem & Vieta itidem uſurpavit.

Hinc iiſdem difficultatibus, quibus vetus Algebra ſcatebat, nova etiam erat obnoxia, & ſicuti imperfecta erat olim reſolutio æquationum cubicarum ab Italis tradita, ſic etiam manſit apud Vietam. Hoc unum docuit Franciſcus Vieta, ante ipſum à nemine traditum, nimirum qua ratione linearum ope deſignari poſſint radices æquationis. Sed quoniam non aliam voluit in Geometriam lineam curvam admittere, quàm circumferentiam circuli; imperfectam quoque materiam iſtam nobis reliquit; quandoquidem dumtaxat conſtructionem exhibuit illarum æquationum, quarum radices

circuli, & rectæ lineæ interſectione poſſunt inveniri.

Exorto Carteſio, litterarii orbis egregio reſtauratore, cæpit ex Algebrâ, & Geometriâ ita quidem unum conflari corpus, ut una ab alterâ ampliùs divelli non poſſet. Quum enim noverit Carteſius imperfectam eſſe reſolutionem æquationum cubicarum, ab Italis excogitatam, remque eſſe omnino deploratam, illam ad umbilicum perducere; ad rem eſſe exiſtimavit, hac viâ prætermiſsâ, radices æquationum per longitudines linearum deſignare. Itaque invectis in Geometriam tum conicis Veterum ſectionibus, cùm lineis aliis curvis, ſectionibus conicis magis compoſitis; illarum cum circumferentiâ circuli interſectione æquationum omnium docuit conſtructionem.

Id autem ab iis, qui deinceps ſunt ſecuti, non modò non improbatum, ſed à nemine, quem ſciam, expanſis ulnis non acceptum. Nam quum ſingulis innotuerit, radices æquationum non meliùs deſignari poſſe, quàm interſectione curvarum; in id omnes dederunt operam, ut non ampliùs reſolutionem æquationum algebraicam, ſed earundem conſtructionem geometricam excolerent. Qua ratione

ne abdicatâ ſeverâ illâ lege, abſque ullo fundamento latâ, quod id tantùm geometricum eſſet, quod circulo, & rectâ lineâ perficitur, non tantùm Algebram, ſed ipſam quoque Geometriam promoverunt, & ad ſuam amplitudinem revocarunt.

Hæc igitur eſt hiſtorica narratio ortus, & progreſſus ejus diſciplinæ, quæ Algebra dicitur. Unde colligitur, Algebram dupliciter pertractari poſſe; vel ſcilicet independenter à Geometriâ, prout exculta fuit ab iis, qui Carteſium præceſſerunt; vel eam cùm Geometriâ conjungendo, prout factum à Carteſio, aliiſque, qui Carteſium ſecuti, veſtigia ejus premere voluerunt. Priori modo pertractata, erit valde imperfecta, ac limitata, & anguſtis admodum limitibus coarctabitur. At verò ſi ſecundo modo tradatur, licebit progredi in infinitum, neque uſpiam terminus invenietur.

Hinc Algebræ Elementa pro novis Tyronibus traditurì, utroque modo illam pertractabimus. Quem in finem in quatuor libros univerſum noſtrum opus partiemur. Primus etenim erit de calculo litterali, ſive ſpecioſo, & docebit qua ratione algorithmus quantitatum poſſit per al-

alphabeti litteras exerceri. Secundus aget de problematum reſolutione ſpecioſâ, & methodum tradet inveniendi radices æquationum independenter à Geometriâ. Tertius erit veluti Iſagogicus pro intelligendâ æquationum geometricâ conſtructione, quum locorum geometricorum compoſitionem exhibeat. Et quartus demum aget de ipsâ æquationum conſtructione geometricâ, oſtendetque qua ratione radices æquationum poſſint per linearum longitudines deſignari.

Itaque primus noſtræ Algebræ liber agit de calculo litterali, ſive ſpecioſo, oſtenditque, qua ratione algorithmus quantitatum poſſit per alphabeti litteras exerceri. Quantitates Veteres deſignabant, vel per numeros, vel per longitudines linearum. Utraque deſignandi ratio ſuas habet utilitates, ſed utraque ſua etiam patitur incommoda. Utile namque eſt, quantitates per numeros deſignare, quia ſic facili negotio ad calculum poni poſſunt; diſplicet verò ex alio capite, quia per numeros non omnes quantitates exprimi queunt. Sed viciſſim utile eſt, per longitudines linearum quantitates exprimere, quia hac ratione omnes omnino quantitates poſſunt deſignari; diſ-

pli-

plicet verò ex aliâ parte, quia quantitates ſic deſignatæ non ita facilè poſſunt ad calculum poni.

Hinc tertia quantitates deſignandi ratio excogitata, quæ habet quidem utriuſque utilitates, nullius verò incommodum patitur. Fit enim per litteras alphabeti, quibus calculus perinde perficitur, ac numeris fieri ſolet, & quibus omnes omnino quantitates peræquè deſignantur, ac lineis exprimi poſſunt. Itaque, quâ ratione quantitatum calculus fieri debeat, quum per alphabeti litteras quantitates ipſæ deſignantur, priori libro docemus. Sed in tradendis regulis hujus calculi ſupponimus, Lectores non ignorare calculum arithmeticum, ubi quantitates numeris exprimuntur, quin imò requirimus, ut in eo exercendo magnam habeant promptitudinem, ac facilitatem.

Calculum autem litteralem tradituri, illud in limine præmittimus, quod ſicuti quantitates omnes poſſunt per alphabeti litteras deſignari, ita earundem multiplices, aut partes quælibet figuris arithmeticis non incongruè deſignentur. Præmittimus, etiam, quod in calculo litterali, præter ipſas litteras, quibus quantitates exprimuntur, adhibeantur quo-

que

que ſigna duo, quorum unum utpote poſitivum ſignificat plus, alterum utpote negativum ſignificat minus. Horum ſignorum diſpar eſt ratio; nam quod per unum ponitur, per alterum aufertur. Unde illud etiam viſum eſt in ipſo limine adnotare, quod quum plures occurrunt quantitates iis ſignis connexæ, iiſdemque litteris deſignatæ, contrahendæ ſint illæ, habitâ ſignorum, quibus afficiuntur, ratione.

Quantitatum litteris deſignatarum duas ſpecies diſtinguimus, quarum alias vocamus ſimplices, alias compoſitas. Simplices ſunt illæ, quæ vel unicâ litterâ, vel pluribus litteris nullo ſigno copulatis deſignantur. Compoſitæ verò, quæ duabus aut pluribus litteris ſigno aliquo conjunctis exprimuntur. Oſtendimus autem primo loco calculum quantitatum ſimplicium; tum deinde progredimur ad calculum quantitatum compoſitarum, quæ ex ſimplicium additione, vel ſubtractione oriuntur. Et quoniam ex diviſione tum iſtarum, cùm illarum ſubnaſcuntur fractiones, ſive quantitates fractæ; harum proinde calculus poſtea ſubnectitur.

Ad hæc docemus formationem poteſtatum. Qua in re primò quidem oſtendimus

mus quid veniat nomine poteſtatis,& qua ratione diſtinguantur in ordines; deinde tradimus elevationem quantitatum ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; porrò explicamus elevationem quantitatum ad cubum, ſive tertiam poteſtatem; & denique qua ratione quantitates ad poteſtates altiores eleventur, ſummatim aperimus. Eodem in loco oſtendimus etiam, quo artificio conſtitui poſſint tabulæ, quæ contineant poteſtates omnes numerorum naturalium.

Formationem poteſtatum excipit earundem reſolutio, ſive extractio radicum. Itaque primò docemus, qua ratione extrahi poſſit quadrata radix; deinde quo pacto extrahenda ſit radix cubica; & denique quo artificio omnes aliæ radices extrahi debeant. Quumque ad poteſtates elevari poſſint non modò quantitates integræ, verùm etiam fractiones; docemus quoque, quo pacto extrahendæ ſint radices ex fractionibus: qua in re methodum priùs oſtendimus, qua mediante fractiones ad quamcumque datam poteſtatem debeant attolli.

Hoc in loco explicamus etiam geneſim quantitatum incommenſurabilium, quatenus conſiderantur in Arithmeticâ, & oſten-

ſtendimus oriri hujuſmodi quantitates, quum radicem oportet extrahere ex quantitate, quæ nequaquam ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur. Quantitates iſtæ ſolent quoque vocari radicales, quia ſcilicet deſignantur, adhibito ſigno radicali. Eædem à Recentioribus vocantur etiam poteſtates imperfectæ, quia nempe ad inſtar poteſtatum poſſunt deſignari, adhibitis fractionibus velut exponentibus, atque hac occaſione generaliorem poteſtatum ideam exhibemus.

Vocamus etenim poteſtatem, omnem quamcumque quantitatem, cui à tergo, velut exponens, numerus aliquis ſit adſcriptus. Unde quia numerus iſte poteſt eſſe, vel poſitivus, vel negativus; itemque, vel integer, vel fractus: duas hinc poteſtatum diviſiones proferimus; unam nempe in poſitivas, & negativas; alteram in perfectas, & imperfectas. Vocamus enim poteſtates poſitivas, quæ exponentes habent poſitivos; vocamus verò poteſtates negativas, quæ viciſſim habent exponentes negativos. Et ſimiliter dicimus poteſtates perfectas, quarum exponentes ſunt numeri integri; dicimus verò poteſtates imperfectas, quarum exponentes ſunt numeri fracti.

Pro

Pro intelligendâ harum omnium poteſtatum naturâ, explicamus primò naturam progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ, itemque analogiam, quæ inter utramque progreſſionem intercedit, oſtendimus. His prælibatis, quid interſit inter poteſtates poſitivas, & negativas, quidve inter poteſtates perfectas, & imperfectas, aperitur: qua ratione in propatulo ponitur natura tam poteſtatum poſitivarum, & negativarum, quàm poteſtatum perfectarum, & imperfectarum. Denique ſubnectitur calculus poteſtatum per exponentes; nam multiplicatio, diviſio, formatio poteſtatum, & extractio radicum, quotieſcumque circa omnes recenſitas poteſtates, quæ ad unam, eandemque quantitatem referuntur, debent inſtitui, longe faciliùs expediuntnr adhibitis exponentibus, quàm aliâ quavis ratione.

Quantitates porrò incommenſurabiles, ſive radicales quia in reſolutione problematum frequenter occurrunt, accidit ſæpè ſæpiùs, ut & ipſæ etiam ad calculum poni debeant. Itaque, ne, quum id contingit, hæreant Tyrones; ad rem viſum eſt, earum quoque calculum oſtendere. Et quoniam de hujuſcemodi quantitatum

tum calculo nihil fermè traditur in Arithmeticâ vulgari; de eo proinde paulò accuratiùs differitur: quem in finem exempla ejus calculi afferuntur, non modò in quantitatibus, quæ alphabeti litteris deſignantur, verùm etiam in iis, quæ per numeros, ſive cyphras arithmeticas exprimuntur.

Quantitates radicales, perinde ac rationales, dividi poſſunt in ſimplices, & compoſitas: unde primò agitur de calculo radicalium ſimplicium, tùm deinde de calculo radicalium compoſitarum. Quantitates radicales dicuntur ſimplices, quotieſcumque unicum habent terminum, eùmque affectum ſigno radicali. Ad harùm quantitatum calculum intelligendum, præmittimus primò, quòd ſiquidem aliquam ipſarum oporteat aliquoties ſumere, ſatis ſit ei ante ſignum radicale congruentem numerum præfigere; ac proinde, quòd ſi cuilibet quantitati radicali quævis quantitas rationalis præfigatur, intelligenda ſit illa toties ſumpta, quot ſunt partes in iſtâ.

Quantitates, quæ ſunt extra ſignum radicale, ſive ſint numericæ, ſive litterales, vocamus coefficientes earum, quæ ſub ſigno reperiuntur. Docemus autem, qua

qua ratione poſſint eæ quoque ſub ſigno collocari, ſcilicet ſi elevatæ ad poteſtatem, deſignatam ab exponente ſigni radicalis, multiplicentur per quantitates, ſub ſigno exiſtentes. Et quoniam quandoque ex quantitatibus ſub ſigno exiſtentibus, poſſunt viciſſim nonnullæ extra ſignum collocari; docemus etiam, quo artificio fieri id poſſit, nempe ſi ex quantitatibus illis extrahi queat radix, à radicali ſigno denominata.

Quum ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, nonnullæ extra ſignum collocantur, quantitates radicales longè ſimpliciùs oriuntur expreſſæ. Quocirca, ut eædem quantitates, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur, hanc regulam tradimus, ſcilicet, ut extra ſignum collocentur eæ omnes quantitates, ex quibus elici poteſt radix, à ſigno denominata. Sed methodum etiam indicamus, qua vulgus utitur Algebriſtarum; nimirùm dividendo quantitates, ſub ſigno exiſtentes, per maximam poteſtatem, à radicali ſigno denominatam, quæ in iis continetur.

Per iſtam quantitatum radicalium ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductionem, innoteſcit nobis, num quantitates duæ

duæ radicales ſint communicantes inter ſe, hoc eſt rationem habeant ad invicem commenſurabilem. Si enim contigerit, illas reductas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones eandem ſub ſignis radicalibus quantitatem habere, erit earum ratio commenſurabilis, ac rationalis, utpote quæ illa eadem, quæ inter earundem coefficientes exiſtit; ſecus verò, ſi ſub ſignis radicalibus diverſas habeant quantitates.

His præmiſſis, ad ipſum radicalium ſimplicium calculum devenimus. Et primò quidem ad addendas duas, aut plures radicales ſimplices, reducendæ ſunt eæ methodo traditâ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſiquidem contigerit, eas ſic reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere; fiet additio, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, & ſcribendo ſummam, velut coefficientem ejuſdem quantitatis radicalis. Quod ſi verò quantitates radicales propoſitæ, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, non habeant eandem quantitatem ſub ſigno radicali; tunc fiet additio, adhibito ſigno plus.

Sed abſque ulla reductione aliâ quoque methodo docemus fieri poſſe additio-

nem

nem radicalium ſimplicium, quam commodiorem exiſtimamus in quantitatibus numericis: nimirum, ſi capiantur quantitates, ſub ſignis exiſtentes, & dividatur major per minorem. Nam ſiquidem contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut extrahi exinde poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; eliciatur radix iſta, eaque unitate aucta fiat coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno poſitæ, & habebitur ſumma quæſita. Quod ſi verò ex illo quotiente extrahi nequeat prædicta radix; tunc facienda eſt additio ſigno plus: quemadmodum fiat oportet, ſi quantitati radicali addenda ſit quantitas alia commenſurabilis, ac rationalis.

Secundò, ut ex unâ quantitate radicali ſubtrahi poſſit altera quantitas radicalis, reducendæ ſunt etiam ambæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſiquidem contigerit, eas ſic reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere; fiet ſubtractio, ſubducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, & ſcribendo reſiduum, velut coefficientem ejuſdem quantitatis radicalis. Quod ſi verò quantitates ad ſubtrahendum propoſitæ, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, non

Digitized by Google

habeant ſub ſigno radicali eandem quantitatem; tunc fiet ſubtractio, adhibito ſigno minus.

Sed abſque ullâ reductione ſubtractionem quoque quantitatum radicalium aliâ methodo docemus, quæ commodior deprehenditur in quantitatibus numericis: nimirum capiendo quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, & dividendo majorem per minorem. Nam ſiquidem contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; fiat radix iſta, unitate minuta, coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno ſuo poſitæ, & habebitur reſiduum quæſitum. Quod ſi verò ex illo quotiente extrahi nequeat prædicta radix; tunc facienda eſt ſubtractio, adhibito ſigno minus: quemadmodum fiat oportet, quotieſcumque inſtitui debet inter quantitates duas, quarum una ſit rationalis, altera radicalis.

Tertiò ad multiplicandas per ſe mutuò quantitates ſimplices radicales, nullâ opus eſt earum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione, ſed ſatis eſt quantitates, ſub ſignis exiſtentes, inter ſe mutuò multiplicare, productoque idem radicale ſignum præfigere; quod ſi verò quan-

quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, neceſse eſt eos quoque inter ſe mutuò multiplicare. Sed oſtendimus productum, quod oritur ex mutuâ quantitatum radicalium multiplicatione, non ſemper eſse quantitatem aliam radicalem, verùm fieri poſse, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: ſcilicet ſi quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò multiplicatæ, producant quantitatem, ex qua elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Id enim quum accidit, eliciatur prædicta radix, eaque per coefficientes quantitatum propoſitarum multiplicata, productum quæſitum exhibebit.

Quartò ad dividendas per ſe mutuò quantitates ſimplices radicales, neque etiam opus eſt, eas ad ſimpliciòres ſuas expreſſiones revocare, ſed ſufficiet quantitates, ſub ſigno exiſtentes, per ſe mutuò dividere, & quotienti idem radicale ſignum præfigere; quod ſi verò quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, neceſse eſt eos quoque per ſe mutuò dividere. Sed hic etiam notamus, quotientem, qui oritur ex mutuâ quantitatum radicalium diviſione, non ſemper eſse quantitatem aliam radicalem, verum fieri

ri poſse, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: ſcilicet ſi quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò diviſæ producant quotientem, ex quo elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Id namque ſi contingit, eliciatur prædicta radix, eaque multiplicata per quotientem, qui oritur ex mutuâ coefficientium diviſione, quæſitum quotientem exhibebit.

Quotieſcumque quantitas rationalis multiplicari debet per quantitatem radicalem, illa huic præfigenda, nullo ſigno interjecto; vel etiam, ſi quantitas radicalis ſuum habeat coefficientem, multiplicandus eſt iſte per quantitatem rationalem propoſitam. Verumtamen, ſi inter quantitatem radicalem, & quantitatem aliam rationalem inſtituenda ſit diviſio; tunc ad hanc commodiùs peragendam, primò quidem attollenda eſt quantitas rationalis ad eam poteſtatem, quam oſtendit radicale ſignum alterius, tunc deinde diviſio facienda. Cæterùm, ſi ex diviſione quantitatum fractio oriatur, ex qua elici non poſſit radix, de qua agitur; tunc radicale ſignum, vel præfigendum toti fractioni ad modum unius, vel etiam tam numeratori, quàm denominatori. Sed ſi ex nu-

numeratore, denominatoreve elici poſſit, non item ex alio; eo caſu, ex quo elici poteſt, eliciatur; ex quo verò elici nequit, ei radicale ſignum ſeorſim præfigatur.

Quintò, quemadmodum nullâ eſt opus reductione, quum quantitates ſimplices radicales per ſe mutuò multiplicantur, aut dividuntur, ità neque etiam ulla requiritur reductio, quotieſcumque quantitates radicales ad datam quamcumque poteſtatem ſunt elevandæ, quum ſatis ſit ad poteſtatem illam attollere quantitates ipſas, ſub ſignis exiſtentes, iiſdemque idem radicale ſignum præfigere; quod ſi verò quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, neceſſe eſt, eos quoque ad datam poteſtatem attollere. Atque hic quoque notamus, poteſtatem, ad quam attollitur quantitas aliqua radicalis, non ſemper eſſe quantitatem aliam radicalem, ſed fieri poſſe, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis; veluti ſi poteſtas, ad quam elevanda eſt quantitas radicalis, ſit illa eadem, quam radicale ſignum oſtendit. Tunc enim ipſa quantitas, ſub ſigno exiſtens, per quæſitam coefficientis poteſtatem multiplicata, id quod quæritur exhibebit.

Denique ad extrahendas radices ex ra-

dicalibus ſimplicibus neque etiam neceſſe eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare, quum ſufficiat illas extrahere ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, iiſque idem radicale ſignum præfigere; ſed ſi quantitates radicales, ex quibus radix quæcumque extrahi debet, ſuos habeant coefficientes, neceſſe eſt, ex iis quoque radicem illam extrahere. Quotieſcumque autem ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi nequit radix, de qua agitur; tunc multiplicari debet exponens ſigni radicalis per exponentem quæſitæ radicis. Et ſiquidem quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, ex quibus extrahi nequeat quæſita radix; tunc meliùs erit coefficientes quoque ſub ſignis radicalibus reponere, & radicem methodo mox traditâ ex quantitatibus illis extrahere.

Cæterùm formatio poteſtatum, & extractio radicum in radicalibus ſimplicibus multò faciliùs perficiuntur, ſi quantitates ipſæ radicales velut poteſtates imperfectæ conſiderentur. Nam quantum ad formationem poteſtatum, ſatis erit exponentes ipſarum duplicare, ſi elevandæ ſint ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; triplicare, ſi ad cubum, ſive tertiam

tiam poteſtatem; quadruplicare, ſi ad quadrato-quadratũ, ſive quartã poteſtatẽ; atq; ita deinceps. Quantùm verò ad extractionem radicum; ſatis erit ex exponentibus ipſarum ſumere ſemiſſem, ſi quæratur radix quadrata; trientem, ſi radix cubica; quadrantem, ſi radix quadrato-quadrata; atque ita in infinitum.

Oſtendimus autem in extractione radicum ex radicalibus ſimplicibus, quod quæcumque radix proponatur extrahenda ex quantitate aliquâ radicali; ſemper radix illa debeat eſſe quantitas altera radicalis; nec unquam eſſe poſſit commenſurabilis, ac rationalis: Nam ut talis exiſtat, neceſſe foret, ut extractâ ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, radice quæſitâ, talis oriatur quantitas, ut exinde extrahi quoque poſſit radix, à ſigno radicali denominata: quod profectò quum contingit, jam ab initio ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi poterat radix, quam radicale ſignum oſtendit, nec proinde erat quantitas incommenſurabilis, ac radicalis.

In calculo radicalium ſimplicium illud ſemper ſuppoſuimus, ut quantitates radicales inter ſe mutuò addendæ, ſubtrahendæ, multiplicandæ, aut dividen-

dæ ſint ejuſdem denominationis, ſive idem habeant ſignum radicale. Unde, quia ſæpeſæpiùs occurrit, ut operationes iſtæ inſtitui debeant inter radicales diverſæ ſpeciei, ſive denominationis; ſubjungimus proinde modum, quo mediante radicales diverſi nominis poſſint ad eandem denominationem revocari. Hunc in finem quantitates ipſas radicales velut poteſtates imperfectas, conſideramus. Sic enim ſatis erit ad eandem denominationem reducere fractiones, quæ ſunt exponentes earum poteſtatum; quum hac ratione propter communem eorum exponentium denominatorem, eadem quoque erit quantitatum radicalium denominatio.

Hoc autem agentes, incidimus in regulam, quam vulgus adhibet Algebriſtarum pro reducendis radicalibus ad eandem denominationem: nempe, ut primò elevetur quantitas, ſub cujuſque ſigno exiſtens, ad poteſtatem, à ſigno alterius denominatam; tunc proprius cujuſque ſigni index multiplicandus ſit per indicem alterius. Interim, ſi index ſigni unius quantitatis radicalis exactè contineatur in indice ſigni alterius quantitatis; tunc elevetur ſola illa quantitas radicalis ad po-

poteſtatem, denominatam à numero, qui oſtendit, quoties unus index in altero continetur, & per hunc eundem numerum multiplicetur index ſigni ejuſdem quantitatis. Nam hac ratione jam idem erit ſignum utriuſque quantitatis radicalis, nec altera quantitas à ſede ſuâ mutabitur.

Oſtenſo calculo radicalium ſimplicium, progredimur ad calculum radicalium compoſitarum, quem facili negotio intelliget quicumque regulas prioris calculi ritè perceperit. Quantitates radicales dicuntur compoſitæ, quum duos, aut plures terminos habent affectos ſigno radicali. Unde ſicuti commenſurabiles compoſitæ oriuntur ex additione, & ſubtractione commenſurabilium ſimplicium; ita quoque ex additione, & ſubtractione radicalium ſimplicium ſubnaſcuntur radicales compoſitæ. In harum quantitatum calculo expediendo illud etiam aſſumimus, ut quantitates, in quibus operationes ſunt inſtituendæ, ex ejuſdem ſpeciei radicalibus conſtent. Quocirca ſi quantitates offerantur, quæ radicalibus conſtent diverſæ ſpeciei; eæ mutandæ ſunt priùs in alias, quarum radicales omnes eandem habeant denominationem.

Ita-

Itaque primò radicalium compoſitarum additionem in hunc modum commodè fieri poſſe docemus: reducantur primò ſingulæ cujuſque quantitatis addendæ partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones; deinde conjungantur ſimul iiſdem omnino ſignis, quibus afficiuntur: & ſiquidem plures occurrant partes, quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, iiſdem ſignis ſint affectæ, addantur earum coefficientes in unum; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantitatem, ſed ſigna ſint contraria, earundem coefficientes à ſe mutuò ſubtrahantur. Quod ſi inter quantitates radicales aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales, eæ quoque cum aliis ſuis propriis ſignis ſunt conjungendæ; verùm, quia cum radicalibus contrahi nequeunt, ſatis erit, quum fieri poteſt, inter ſe mutuò illas contrahere.

Non diſſimiliter ſubtractionem radicalium compoſitarum inſtituendam eſſe decernimus: reducantur namque primò ſingulæ cujuſque quantitatis partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones; deinde conjungantur ſimul, mutatis ſignis partibus omnibus quantitatis ſubtrahendæ. Et ſiquidem hac factâ conjunctione, plu-

res

res occurrant partes, quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, iiſdem ſignis ſint affectæ, addantur earum coefficientes in unum; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantitatem, ſed ſigna ſint contraria, earundem coefficientes à ſe mutuò ſubducantur. Quod ſi inter partes radicales quantitatis ſubtrahendæ aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales, eæ quoque mutatis ſignis adjungendæ ſunt partibus quantitatis, ex qua fieri debet ſubtractio; verùm, quia cum radicalibus ipſius contrahi nequeunt, ſatis erit eas contrahere cum aliis commenſurabilibus, ſi quæ ſunt, in hac altera quantitate.

Quantum ad multiplicationem radicalium compoſitarum, eam inſtituimus eadem omnino ratione, qua quantitatum commenſurabilium compoſitarum perficitur multiplicatio: nimirum multiplicando ſingulas partes unius per ſingulas partes alterius, & ſcribendo producta ſigno poſitivo, quum quantitates ad invicem multiplicandæ iiſdem ſignis afficiuntur, & viciſſim ſigno negativo, quum ſignis contrariis ſunt affectæ. Quamquam autem pro multiplicatione quantitatum

radicalium haud quidem neceſſe ſit, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; attamen ut faciliùs cognoſci poſſit, quæ producta oriantur rationalia, vel irrationalia, quæque itidem peractâ multiplicatione ſunt ſimul conjungenda, aut à ſe mutuò ſubtrahenda; præſtat quantitates omnes radicales ante multiplicationem ad ſimpliciores ſuos terminos reducere.

Similiter quantitates radicales compoſitas elevamus ad quamcumque datam poteſtatem eadem omnino ratione, qua ad eam attolluntur quantitates compoſitæ rationales: nimirum capiendo quadrata partium, duplumque ejus, quod oritur ex mutuâ earum partium multiplicatione, ſi ad quadratum ſint elevandæ; vel ſumendo cubos partium, triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per ſecundam, triplumque ejus, quod producitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam, ſi elevandæ ſint ad cubum; atque ita deinceps: & conſiderando quoque velut unam omnes priores partes, quotieſcumque propoſitæ quantitates ex pluribus, quam duabus, partibus conſtant. Sed obſervamus hoc loco, quod quotieſcumque ſigna

quan-

quantitatum radicalium eoſdem habent indices cum poteſtate, ad quam illæ ſunt elevandæ, tot ſemper termini neceſſariò oriantur rationales, quot ſunt partes in quantitatibus propoſitis.

Ad diviſionem radicalium compoſitarum commodiùs peragendam, oſtendimus primò, qua ratione inveniri poſſit quantitas contraria cujuſcumque datæ radicalis. Vocamus autem datæ alicujus radicalis contrariam quantitatem, quæ talis eſt, ut ſi per eam data quantitas radicalis multiplicetur, id quod producitur, ſit quantitas alia commenſurabilis, ac rationalis. Hæc quantitas contraria facili negotio invenitur, quum data quantitas radicalis eſt ſimplex. Elevetur ſiquidem data quantitas ad poteſtatem, cujus index ſit unitate unâ minor indice ſigni radicalis, & erit poteſtas iſta quantitas contraria quæſita; quæ tamen, ut ſimplicior habeatur, contrahi quandoque poterit, ſi quantitas ſub ſigno exiſtens dividatur per maximam poteſtatem à ſigno denominatam, quæ in illâ continetur.

Quod ſi data quantitas radicalis ſit compoſita, eademque duas habeat partes, invenimus ejus contrariam quantitatem hoc

hoc artificio: mutamus uni ejus parti ſignum, quo affecta reperitur, tum factâ hac mutatione elevamus quantitatem totam ad poteſtatem, cujus index ſit unitate unâ minor indice ſigni radicalis: nam ſi deinde ex terminis hujus poteſtatis deleantur coefficientes, hoc eſt numeri deſignantes, quoties termini illi ſumi debeant in poteſtate; erit ipſa illa poteſtas, ex cujus terminis deleti ſunt coefficientes, quantitas contraria quæſita. Atque hæc regula, non diſſimilis ab illâ, quam in magno ſuo opere arithmetico docet Nicolaus Tartalea, locum etiam obtinet, ſi una ex duabus partibus radicalis propoſitæ ſit commenſurabilis, ac rationalis.

Sed ſi quantitas radicalis tres partes habeat, paulò difficilior erit contrariæ quantitatis inventio, & nonniſi analyſis ope illa poterit inveniri. Interim in Tyronum gratiam duas regulas valde faciles, ac expeditas proferimus: quarum una locum ſibi vindicat in iis quantitatibus, quæ conſtant ex radicalibus quadratis, & in quibus index ſigni radicalis eſt binarius; altera locũ obtinet in quantitatibus, quæ conſtant ex radicalibus cubicis, quæque pro indice ſigni radicalis ternarium habent.

Oſten-

Oſtenſo, qua ratione inveniri poſſit quantitas contraria datæ alicujus radicalis, diviſionem explicamus radicalium compoſitarum. Et quidem interdum quantitates radicales compoſitæ dividi poſſunt per ſe mutuò eadem quoque ratione, qua fit diviſio quantitatum commenſurabilium. Sed generaliter diviſio harum quantitatum longe faciliùs perficitur, faciendo, ut diviſor unicum terminum contineat. Id autem obtinetur, capiendo quantitatem contrariam diviſoris, & per eam tam diviſorem, quàm quantitatem dividendam multiplicādo; nam hac ratione diviſor evadet rationalis, adeòque unicum tantummodo terminum continebit. Neceſſe eſt verò, per quantitatem contrariam diviſoris tam diviſorem, quàm quantitatem dividendam multiplicare, ut diviſio propoſita non alteretur, & quæſitus exinde quotiens deducatur.

Diviſorem radicalium compoſitarum excipere debebat extractio radicum ex iiſdem quantitatibus; ſed operatio iſta digna nobis viſa eſt, ut peculiari capite pertractetur. Itaque de eâ ſeorſim agentes, notamus primò radicales ſimplices vocari poſſim monomia, quaſi quantitats unius no-

nominis, ſive termini; & ob eandem rationem radicales compoſitas vocari multinomia, quia ſcilicet plura nomina, ſive terminos continent; ſed ſpeciatim dici binomia, quum duos terminos habent; trinomia, quum tres; quadrinomia, quum quatuor; atque ita deinceps.

Notamus quoque, diverſitatem terminorum in radicalibus compoſitis repetendam eſſe à diverſitate quantitatum, quæ in iis terminis, ad ſimpliciores expreſſiones revocatis, ſub radicali ſigno continentur: unde ſi in radicalibus compoſitis duæ, aut plures radicales ſimplices occurrant, quæ reductæ ad ſuas ſimpliciores expreſſiones, eandem habeant ſub radicali ſigno quantitatem; eæ non totidem terminos, ſed unicum conſtituere dicuntur. Nec reticemus, radicales compoſitas vocari binomia, trinomia, aut quadrinomia, etiam ſi in iis aliquis terminus fuerit commenſurabilis, ac rationalis. Sed quemadmodum omnes illæ partes radicales, quæ eandem ſub ſigno radicali continent quantitatem, pro uno, eodemque termino computantur; ita etſi plures fuerint partes commenſurabiles, ac rationales, omnes tamen pro uno, eodemque termino ſumi debent.

Quo-

Quoniam autem in reſolutione problematum non alius ferè caſus occurrit, quàm ut radices extrahantur ex iis quantitatibus radicalibus, quæ duos terminos habentes, dicuntur binomia; idcircò de extractione radicum ex binomiis dumtaxat agendum aggredimur. Sed binomia, ex quibus radices extrahimus, non ex cujuſcumque generis radicalibus conſtant, ſed ex iis tantùm, quæ ſigno quadratæ radicis afficiuntur. Cujus rei ratio eſt, tum quia hujuſmodi potiſſimum binomia occurrunt nobis in problematum reſolutione, tum etiam quia ex aliis binomiis non ita facile eſt radices extrahere. Quin etiam radices horum binomiorum tales itidem optamus, ut nonniſi ejuſdem generis, hoc eſt quadratas radicales comprehendant; quia quum ſic non oriuntur expreſſæ, arbitramur meliùs facturum, qui ingenuè fatetur, eas extrahi non poſſe, eaſdemque exhibet, adhibito alio ſigno radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

Itaque primò docemus, qua ratione extrahi poſſit quadrata radix ex binomiis: qua in re oſtendimus ante omnia, quod ut ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix extrahi poſſit, ut nonniſi

radicales quadratas comprehendat, unus ex terminis ejus debeat eſſe rationalis, alter incommenſurabilis, ac radicalis: ſed oſtendimus deinde, præter id, alia duo requiri; primum, ut terminus rationalis major ſit termino radicali; & alterum, ut differentia quadratorum utriuſque termini ſit etiam quadratum: quæ quidem quum habentur, extrahetur quadrata radix, capiendo differentiam quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii, ejuſque quadratam radicem primò addendo termino rationali, deinde ex eodem ſubtrahendo; quippe, ſi poſtea capiantur ſemiſſes ſummæ, & reſidui erunt radices harum ſemiſſium termini quæſitæ radicis.

Neque verò ſilentio præterimus, quod ſi in radicibus extrahendis parum curemus, ſi eæ radicales contineant quadratas, aut alterius cujuſque ſpeciei, poſſit eâdem regulâ etiam ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis, extrahi quandoque quadrata radix. Sed oſtendimus, quod, ut id fieri poſſit, neceſſe ſit, binomium illud hujuſmodi eſſe, ut differentia quadratorum ex terminis ejus non quidem ſit quadratum, ſed ut ejus quadrata radix rationem habeat commen-

menſurabilem, ac rationalem cum aliquo ex terminis propoſiti binomii, quò ſcilicet, & addi, & ſubtrahi poſſit ex termino illo.

Secundò docemus, qua ratione ex binomiis extrahi poſſit radix cubica. Atque hìc oſtendimus in primis, radicem cubicam, quæ ſit ejus naturæ, qualem optamus, extrahi poſſe, non modò ex binomio, cujus unus terminus eſt rationalis, alter radicalis, verùm etiam ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis. Sed oſtendimus quoque, quod cujuſcumque ſit formæ binomium propoſitum, ut ex eo extrahi poſſit radix cubica, quæ nonniſi radicales quadratas comprehendat, hujuſmodi eſſe debeat, ut differentia quadratorum ex terminis ejus non quidem ſit quadratum, ſed cubus perfectus; atque hujus radix cubica erit differentia quadratorum ex terminis quæſitæ radicis, quum iſta extrahi poteſt. Unde pro extrahendâ radice cubicâ ex binomio, cujus unus terminus ſit rationalis, alter radicalis, hanc regulam deducimus.

Capiatur radix cubica proximè major binomii propoſiti, ſed quæ non ampliùs, quàm ſemiſſe unitatis differat à verâ ra-

dice, quæ præter propter cognoſci p
tum ex differentiâ quadrarorum,
ſiunt eſt terminis ejuſdem binomii
ciatur radix cubica, eaque per rad
illam proximè majorem dividatur.
ſi terminus rationalis major fuerit
mino radicali, quotiens, qui exin
ritur, addatur cum eadem illâ r
proximè majori; & ſiquidem ſumma
jus capiatur ſemiſſis ſine fraction
cujus quadrato ſubducatur radix cu
prædictæ quadratorum differentiæ;
ſemiſſis illa pars rationalis, radix
quadrata reſidui inde orti pars rad
quæſitæ radicis. Quod ſi autem tern
rationalis minor fuerit termino rad
quotiens, qui ex illâ diviſione pro
tur, ſubducatur ex radice illâ pro
majori; & ſiquidem reſidui hujus c
tur adhuc ſemiſſis ſine fractione,
quadrato addatur radix cubica præ
quadratorum differentiæ, erit rurſ
miſſis illa pars rationalis, radix
quadrata ſummæ inde ortæ, pars ra
lis quæſitæ radicis.

Notamus autem, quantitatem, qu
hanc regulam invenitur, non ſemp
ſe radicem propoſiti binomii, ſed
demum, quum hæc ex illo extrahi p

acq; id inſuper non aliter cognoſci poſſe, quàm ſi rei periculum fiat. Nam etſi, quum differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii, nequaquam eſt cubus perfectus, extrahi illa non poſſit; non hinc tamen concludendum eſt, viciſſim extrahi illam ſemper poſſe, quum prædicta differentia cubus prodit perfectus. Sed notamus quoque, quod ſi de qualitate radicum ſolliciti nequaquam nos eſſe velimus, extrahi quandoque poſſit radix cubica etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam ſit cubus perfectus. Nam ſi termini iſtius binomii multiplicentur per differentiam illam, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus cubus erit perfectus: quocirca ſi ex novo iſto binomio radix cubica extrahi poſſit, eadem diviſa per radicem cubicam prioris differentiæ, dabit radicem cubicam prioris binomii.

Atque hac ratione oſtendimus, radicem cubicam extrahi quandoque poſſe ex binomio, cujus termini fractiones involvant, ſcilicet ſi per multiplicationem tollantur fractiones illæ, & deinde novi binomii radix cubica dividatur per radicem cubicam ejus quantitatis, quæ vi-

ces geſſit multiplicatoris. Nec
ratione docemus extrahi poſſe
cubicam ex binomio, cujus
terminus eſt radicalis: nimirum
tiplicationis ope unus ex termi
fiat rationalis, & deinde radix
novi binomii dividatur per radice
cam illius quantitatis, quæ multi
ris vices obtinuit. Sed ſi radix cu
trahenda non alias radicales, quà
dratas, debeat continere; eliciet
ſi termini propoſiti binomii ita
ciùs exprimi poſſint, ut ſumma
cientium ſit quadrupla ſummæ q
tum, ſub ſignis exiſtentium; dif
verò eorundem coefficientium ſi
differentiæ, quæ inter eaſdem q
tes exiſtit: nam deletis coefficie
dabunt ipſi termini quæſitam rad
Denique docemus, qua ratione
nomiis extrahi poſſint radices alia
riores; ſed hac in re viſum eſt nol
tùm rationem exponere, qua
poſſint radices illæ, quæ referun
poteſtates numeri imparis; nam
tum ad eas, quæ referuntur ad p
tes numeri paris, haberi poſſu
extractionem, vel ſolius radicis qua
vel quadratæ ſimul, & cubicæ ſæpi

petitam. Et quamquam hoc eodem artificio extrahi quoque poſſint quam plures radices, quæ ad poteſtates numeri imparis referuntur; veluti exempli gratiâ radix, quæ refertur ad poteſtatem nonam, quippe quæ haberi poteſt per duplicem radicis cubicæ extractionem: eas nihilominus excipere non exiſtimavimus; tum quia regula à nobis afferenda non eſt diſſimilis ab illâ, quam attulimus pro extractione radicis cubicæ; tum etiam, quia inter radices numeri paris, & radices numeri imparis non leve diſcrimen intercedit.

Itaque radices numeri imparis regulariter ex iis tantùm binomiis extrahi poſſunt, quæ unum habent terminum rationalem, alterum radicalem; ſed ad eas extrahendas neceſſe eſt, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illâ, de qua agitur; ejuſque radix erit differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis extrahendæ radicis, quum hæc taliter elici poſſit, qualem regulariter optamus. Unde pro extrahendis radicibus numeri imparis ex binomiis, quorum unus terminus ſit rationalis, alter radicalis, regulam colligimus non diſſimilem ab eâ,

quam tradidimus pro extractione ra
cubicæ. Eadem namque per omnia
peragenda, niſi quod, ubi illic elic
erat radix cubica; hìc radix oporte
ciatur ejuſdem ordinis cum illâ, d
agitur.

Cæterùm hìc quoque notamus, q
titatem, quæ per hanc regulam in
tur, tunc demum eſſe radicem quæſ
quum hæc ex propoſito binomio ex
poteſt; pariterque non aliâ ration
gnoſci poſſe, num propoſitum binon
radicem admittat, quàm ſi rei peric
fiat. Nam etſi, quum differentia
dratorum, quæ fiunt ex terminis p
ſiti binomii, nequaquam eſt poteſta
fecta ejuſdem ordinis cum illâ, de
agitur, indicio nobis eſſe poſſit, p
ſitum binomium radicem non admi
non hinc tamen argumento nobis eſ
bet, quod radicem admittat, quum
ciſſim differentia illa prodit illius
nis poteſtas perfecta.

Neque etiam reticemus, quod ſi
litatis radicalium nulla ratio haber
lit; extrahi quandoque poſſit opta
dix etiam ex binomio, in quo differ
quadratorum ex terminis ejus ne
quam ſit illius ordinis poteſtas perf

Etenim ſi termini propoſiti binomii multiplicentur per illius differentiæ poteſtatem aliquam, hoc eſt per quadratum, ſi quæratur radix quinta; per cubum, ſi radix ſeptima; per quadrato-quadratum, ſi radix nona; atque ita deinceps, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus poteſtas erit perfecta illius ordinis, de quo agitur: proindeque, ſi ex novo iſto binomio radix extrahatur, eadem diviſa per radicem cognominem illius quantitatis, quæ vices geſſit multiplicatoris, prioris binomii radicem exhibebit.

Atque hoc artificio pariter notamus, extrahi quandoque poſſe quæſitam radicem, tum ex binomio, cujus termini fractiones involvant, tum itidem ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis: ſcilicet ſi multiplicationis ope in primo caſu tollantur fractiones, in ſecundo verò unus ex terminis propoſiti binomii fiat rationalis. Nam utroque in caſu, ſi novi binomii radix illius ordinis, de quo agitur, dividatur per radicem cognominem ejus quantitatis, quæ multiplicatoris vices obtinuit; erit quotiens hujus diviſionis radix propoſiti binomii.

Quemadmodum autem ad deſignandam

dam radicem, quæ ex quantitate al
rationali elici nequit, præfigitur qu
tati ſignum radicale; ita quoque, q
ex aliquo binomio radix quæcumqu
trahi non poteſt, deſignatur illa ope
dem ſigni radicalis. Et quoniam ſig
iſtud radicale ad utrumque binomii
minum ſe extendit; hinc factum, ut q
titas illa, radicalis univerſalis dicere
Hujuſmodi radicales univerſales, rarò
cidit, ut ad calculum poni debea
ſed ne, quum id contingit, Tyrones n
animo concidant, oſtendimus calcu
ipſarum iiſdem omnino regulis pe
poſſe, quibus aliarum radicalium ca
lus perficitur.

Inde verò ad quantitates progredi
imaginarias, quæ non aliud ſunt, qu
radices numeri paris, extrahendæ
quantitatibus negativis: ſic dictæ, q
creditur in vulgus, eas verè, ac real
non exiſtere, ſed tantùm fingi, ac i
ginari; quum radix numeri paris quan
tatis negativæ concipi nullo pacto poſ
utpote quæ neque eſſe poteſt poſitiva,
que negativa. Sed ad cognoſcendam n
liùs impoſſibilitatem quantitatum im
ginariarum, viſum eſt paulò clariùs
ſtendere, quid ſibi velint quantitates

g

gativæ, ex quibus eæ nobis ſubnaſcuntur.

Et quidem natura quantitatum negativarum facilè intelligitur, quum eæ quantitatibus aliis poſitivis, iiſq; majoribus adhærent; ſed quid eædem ſibi velint, quum vel ſolæ ponuntur, vel quantitatibus aliis adhærent, quæ etſi ſint poſitivæ, iis tamen ſunt minores; hoc utiq; concipi non poteſt. Id igitur explicamus primò mediantibus debitis, & creditis; deinde motu locali, in quo progreſſus dici poteſt motus poſitivus, regreſſus motus negativus. Ex utroque autem exemplo, illud deducimus, quantitates, quæ dicuntur negativæ, non minùs reales eſſe, quàm quæ vocantur poſitivæ; ſed omne diſcrimen inter eas in eo poſitum eſſe, quod quantitates negativæ interpretandæ ſint ſenſu contrario ei, quo poſitivas quantitates interpretamur.

Hac ratione in Geometriâ, ubi quantitates per longitudines linearum deſignantur, ſi linea verſus plagam aliquam ducta, habeatur tamquam poſitiva, erit viciſſim negativa, quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Et eadem ratione in Arithmeticâ, ubi quantitates per numeros exprimuntur, quemadmodum numeri, qui à zero progrediuntur, dicuntur

po-

poſitivi, ita dicendi ſunt negativi
viciſſim à zero regrediuntur. Sed
niam non ita facilè concipi poteſt
meros negativos perinde reales eſſe
poſitivos; quum numerorum ea vid
eſſe natura, ut omnes à zero progre
tur: proinde ne hoc in loco hæreant
rones, realitatem numerorum nega
rum, contra Veterum ſententiam, v
eſt paulò clariùs oſtendere.

Oſtensâ naturâ quantitatum nega
rum, facile nobis fuit, impoſſibilit
oſtendere earum quantitatum, qua
cuntur imaginariæ. Et quoniam qu
tates iſtæ non aliud ſunt, quàm ra
numeri paris extrahendæ ex quanti
bus negativis, illud primò præmitti
radicum extractiones perfici poſſe, i
niendo inter duas datas quantitates u
aut duas medias proportionales; ne
unam, quum extrahenda eſt radix
drata; duas, quum extrahenda eſt r
cubica; tres, quum quæritur radix
drato-quadrata; atque ita deinceps.
enim patebit impoſſibilitas quantita
imaginariarum, ſi utique oſtendi p
inter quantitatem poſitivam, & ne
vam unam, tres, aut quinque m
proportionales nequaquam poſſe repe

Ad id autem oſtendendum neceſſe nobis erat, certum ſtatuere criterium, quo mediante facili negotio cognoſci poſſet, num quatuor quantitates ſint proportionales, necne; nam ea, quæ paſſim afferuntur, ſupponunt, quantitates, quæ comparantur inter ſe mutuò, eſſe vel omnes poſitivas, vel omnes negativas. Itaque, quia quatuor quantitates tunc quidem dicendæ ſunt proportionales, quotieſcumq; antecedentes reſpectu ſuorum conſequentiū eadem lege progrediuntur; non aliud velut criterium certum proportionis ſtatuimus, quàm ut dicamus, tunc demum proportionales eſſe quatuor quantitates, quotieſcumque quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut conſequentem ſuum adæquet, id omne fieri debeat ab alio antecedente, ut ſuum pariter conſequentem adæquet.

Atque hoc mediante criterio colligimus, quod ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, qua quantitates, proportio earum non perturbetur, ſi duæ quævis ſumantur unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus oppoſiti; perturbetur verò, ſi tres quidem ſumantur unius ſtatus, & quarta ſtatus contrarii. Unde facili negotio oſtendimus inter quantitatem poſiti-

ti-

tivam, & negativam unam, tres,
quinque medias proportionales non p
reperiri; quia ſic ex quatuor term
unius ejuſdemque analogiæ, tres eſ
unius ſtatus, & quartus ſtatus oppoſi

Hac igitur ratione ex proprio ſuo
te deduximus impoſſibilitatem ea
quantitatum, quæ dicuntur imagina
Sed notamus impoſſibilitatem iſtam i
tantùm conſiſtere, quod quantitates
nec poſitivæ eſſe poſſint, nec negat
Unde non ideo eas omnino fictitias di
das eſſe arbitramur, quia fingi poteſt
tius quidam ſtatus, qui ſit medius i
poſitivum,& negativum, & in quo qu
titates illæ ſint reponendæ; & facilè n
perſuademus, quod in Geometriâ ſ
quantitates poſitivæ, & negativæ exp
tur per lineas tendentes ad plagas op
tas, ita quantitates, quæ dicuntur im
nariæ,explicari poſſint per lineas,qu
plagas tendunt intermedias.

Hæc noſtra de quantitatibus imag
riis opinio, in quam Clariſſimus W
ſius videtur inclinare, eo magis co
matur ex calculo ipſarum. Exinde
diſcimus, quantitates imaginarias
aliter realibus opponi, quàm nega
poſitivis. Itaque quemadmodum o

ſitio, quæ eſt inter quantitates poſitivas, & negativas, nihil obſtat, quominus negativæ ſint perinde reales, ac poſitivæ: ſic etiam ex oppoſitione, quæ eſt inter quantitates reales, & imaginarias, haud quidem inferri debet, quantitates, imaginarias dictas, abſolutè impoſſibiles eſſe; ſed tantùm colligere licet, quod ſicuti quantitates negativæ ſunt impoſſibiles in ſtatu poſitivarum, ita quantitates imaginariæ impoſſibilitatem involvant in utroque eorum ſtatuum, in quibus reales quantitates conſiderantur.

Ex eadem oppoſitione, quæ deprehenditur inter quantitates reales, & imaginarias, adſtrui quoque poteſt modus ille deſignandi quantitates imaginarias in Geometriâ. Nam ſi lineæ, quæ tendunt ad plagam unam, ſint poſitivæ; lineæ, quæ tendunt ad plagam oppoſitam, quia prioribus ſunt contrariæ, debent eſſe negativæ. Jam verò plagæ intermediæ prioribus illis opponuntur ex diametro; adeoque lineæ, tendentes ad plagas intermedias, ſunt contrariæ lineis, quæ tendunt ad plagas priores. Itaque ſi iſtæ ſint reales, illæ ratione oppoſitionis imaginariæ eſſe debent. Quod etiam ex eo confirmamus, quia ſicuti quantitatum, quæ

quæ dicuntur vulgò reales, aliæ ſunt
ſitivæ, aliæ negativæ; ita quantita
quæ vocantur imaginariæ, non modo
poſſint poſitivæ, verùm etiam negat

Jam, quod quantitates imaginariæ
rinde realibus opponantur, ac poſit
negativæ; id ex ipſarum calculo ded
mus. Nam primò quemadmodum mu
plicando, aut dividendo quantitatem
ſitivam per negativam, producitur qu
titas alia ſimiliter negativa; ita m
plicando, aut dividendo quantita
realem per quantitatem imaginari
producitur quantitas alia ſimiliter i
ginaria. Et ſecundò ſicuti id, quod
ducitur ex duabus quantitatibus ne
vis per ſe mutuò multiplicatis, aut
viſis, eſt quantitas poſitiva; ita id,
gignitur ex multiplicatione, aut
ſione duarum quantitatum imagin
rum, eſt quantitas non quidem imag
ria, ſed realis.

Non me latet, Jacobum Ozana
in ſuis Algebræ Elementis docere, q
titates duas imaginarias per ſe m
multiplicatas, vel diviſas quantit
aliam imaginariam producere. Sed
deceptum eſſe oſtendimus, tum qui
ipſâ geneſi quantitatum imaginari

notum eſt, id quod producitur ex multiplicatione unius quantitatis imaginariæ per ſe ipſam, quantitatem eſſe realem, quod equidem ipſe Vir Clariſſimus fatetur; tum etiam, quia in confeſſo eſt apud omnes, idem eſſe ex producto, vel quotiente duorum quadratorum quadratam radicem elicere, quàm ipſas eorum quadratorum radices per ſe mutuò multiplicare, vel dividere.

Cæterùm, ſi vera ſit hæc noſtra de quantitatibus imaginariis opinio, illud exinde colligi poteſt, inter quantitates, qua quantitates, nullam contrarietatem reperiri, ſed oppoſitionem omnem oriri ex eo, quod quædam concipi debeant in ſtatu uno, & aliæ in ſtatu contrario: indeque ortas eas quantitatum diſtinctiones, quod aliæ ſint poſitivæ, aliæ negativæ, quodque etiam quædam ſint reales, aliæ imaginariæ. Sed fatendum eſt quoque, diverſum hunc ſtatum nihil obſtare, quominus poſitivæ cum negativis, reales cum imaginariis comparentur; quum is, quantum in ſe eſt, nequaquam efficiat, ut quantitates dici debeant diverſi generis. Unde procul eſt, ut aſſentiar doctiſſimo Viro Chriſtiano Wolphio, erroris eos redarguenti, qui cenſent quantitates po-

ſitivas ejuſdem generis eſſe cum neg-
vis, adeoque poſſe inter ſe mutuò ra-
nem habere.

Ne in primo noſtræ Algebræ li
quicquam deficeret, quod ad calcul
pertineat litteralem, ſive ſpecioſum, ſ
nectimus his omnibus doctrinam de ſe
bus infinitis. Pro clariori autem ear
intellectu, explicamus primò diviſion
quantitatum in indefinitè magnas, &
definitè parvas, & oſtendimus infinit
marum, ſive quantitatum indefinitè p
varii varia genera poſſe conſiderari. De
de docemus, qua ratione cognoſci po
cujus generis ſint infiniteſimæ, quæ
riuntur ex multiplicatione, vel divi
ne aliarum infiniteſimarum, & oſten
mus id non aliâ meliori ratione cogn
poſſe, quàm adhibitis ipſis infiniteſi
rum exponentibus, hoc eſt numeris,
oſtendunt, cujus generis ſint infiniteſi
per ſe mutuò multiplicandæ, vel divid
dæ.

Et ſanè regula iſta pro cognoſcendo
nere infiniteſimarum, quæ ex aliar
multiplicatione, vel diviſione oriun
deficit in Analyſi indefinitè parvoru
quam Illuſtriſſimus Marchio Hoſp
lius, hauſtam ex variis ſummorum

rorum monumentis, erudito orbi maximo diſciplinarum mathematicarum emolumento impertivit. Eam ſupplere aggreſſus eſt Johannes Petrus de Croſa in ſuis, quas ad calculum in præfatâ Analyſi contentum nuper edidit, notis, ſed irrito quidem conatu; tum quia rem generaliter non concipit, tum etiam, quia multa profert, quæ nec inter ſe, nec cum rei veritate congruere videntur; quemadmodum ante nos obſervavit Illuſtris noſtri Lycæi Neapolitani Mathematum Profeſſor Eximius Auguſtinus Arianus, cujus provinciam vicario jure quatuor ab hinc annis ſuſtinemus.

Ex traditâ porrò regulâ didicimus, præter infiniteſimas, quarum exponentes ſunt poſitivi, dari infiniteſimas alias, quarum exponentes ſunt negativi. Nec difficile nobis fuit, harum aliarum infiniteſimarum naturam inquirere; nam ex oppoſitione, quæ eſt inter poſitivum, & negativum, ſponte ſuâ conſequitur, quod ſicuti infiniteſimæ, exponentes poſitivos habentes, deſignant quantitates indefinitè parvas, ita infiniteſimæ, quæ habent exponentes negativos, deſignare debeant quantitates indefinitè magnas. Nec equidem aliter res eſſe poterat: enim verò, ſicu-

ti deſcendendo à quantitate finitâ
infiniteſimarum genera diſtingui po
ita viciſſim aſcendendo varia gener
nitorum poterunt conſiderari.

Hæc diverſa genera infinitorur
verſis infiniteſimarum generibus
ſpondentia, apertè indicat Vir ſu
Iſaac Newtonus in ſuo de quad
curvarum tractatu. Sed Petrus Va
nius, Mathematicus Pariſienſis, in ob
tionibus ſuis circa ſpatia plusquam
nita Walliſiana, quæ reperiuntur i
numentis Regiæ Scientiarum Aca
anni 1706, non veritus eſt aſſ
quantitates iſtas plusquam infinita
ſuperiora infinitorum genera conſti
contradictionem involvere: qua
ſummoperè decipitur; nam ſicuti n
pugnant diverſa genera infiniteſim
ita neque etiam infinitorum dive
nera contradictionem ullam invo
quemadmodum adversùs eundem
gnonium ſolidè demonſtravit eg
Mathematicus Abbas Guido Grand

Jam eâdem regulâ, oſtendimus
quantitates infinitas poſſe tam in
quàm cum ipſis infiniteſimis mult
ri, aut dividi; ſi ſcilicet recordemu
ponentes ipſarum eſſe negativos, ad

rentiam infiniteſimarum, quarum exponentes ſunt poſitivi. Unde ſequens theorema deducimus, quod ſi quantitas infinita cujuſque generis multiplicetur per infiniteſimam generis non diſſimilis, ipſumque adeo abſolutum infinitum per nihil abſolutum, productum ſit ſemper quantitas finita: id quod ne mirum alicui videretur, notamus eandem quantitatem finitam deſignari poſſe per ſeriem infinitam, hoc eſt infinitorum numero terminorum, nec ideo in infinitum abire; atque hac occaſione doctrinam de ſeriebus infinitis aggredimur.

Primò itaque docemus geneſim ſerierum infinitarum, & oſtendimus ſeries infinitas ſuam originem habere, vel à diviſione, vel à radicum extractione. Nam primò, quemadmodum in diviſione numerorum, quotieſcumque diviſor non eſt pars aliquota dividendi, procedi poteſt per fractiones decimales in infinitum; ita quoque quotieſcumque in diviſione quantitatum, quæ alphabeticis litteris ſunt deſignatæ, diviſor, qui pluribus partibus conſtet, non eſt inſtar partis aliquotæ in dividendo, diviſio in infinitum per fractiones ſimplices poterit continuari. Et ſecundò ſicuti, quum ra-

 dix

dix extrahi debet ex numero aliquo
non ſit poteſtas perfecta ejus ordin
quo agitur, procedi quoque pote
fractiones decimales in infinitum,
radix exhiberi, quæ propiùs ſemp
propiùs in infinitum ad veram im
bilem accedat;ita quoque quotieſcu
ex quantitate aliquâ compoſitâ lit
quæſita radix extrahi nequit, adh
fractionibus ſimplicibus exprimi il
terit per ſeriem infinitorum numer
minorum rationalium, quibus ita
nuò ad quæſitam radicem accederet
errror tandem datâ quavis quan
minor fieret,totaque ſeries exactum
ſitæ radicis valorem exhiberet.

Atque hinc deducimus, quanti
infinitam in ſeriem infinitorum nu
terminorum convertere, problema
quod nullam difficultatem invo
quum quælibet quantitas conſi
poſſit, non modò velut quotiens
ex imperfectâ diviſione duarum alia
verùm etiam velut radix alterius qu
tatis, quæ non ſit poteſtas perfecta
nis aſſumpti. Sed converſum hujus
blematis, nimirum ſeriei infinit
numero terminorum ſummam fir
invenire, non ſolùm paulò difficiliu

pr

prehenditur, ſed hujuſmodi etiam, ut non ſemper ſolutionem admittat. Et quoniam, ſi quem uſum in reſolutione problematum habent ſeries infinitæ, is maximè cernitur, quotieſcumque illarum ſerierum finita ſumma invenitur; proinde oſtensâ geneſi ſerierum infinitarum, operæ pretium nobis viſum eſt de earundem ſummâ finitâ nonnihil ſubjungere.

Itaq; ſecundò conſiderandas nobis proponimus ſeries illas, quarum termini infiniti progreſſionẽ conſtituunt geometricã; nam quotieſcumque termini decreſcunt, ita ut unuſquiſque ſit data quævis pars ſui antecedentis, facile erit eorum omnium ſummam finitam invenire. Hunc in finem hoc quidem oſtendimus theorema generale, quod ſi datæ alicujus quantitatis ſumatur pars ab aliquo numero denominata, hujuſque iterum pars denominata ab eodem numero, atque ita continuò, quod inquam ſumma omnium ſit ejuſdem datæ quantitatis pars denominata ab eodem numero, unitate minuto. Unde colligimus ſummam totius ſeriei eſſe æqualem datæ quantitati, quum numerus partem denominans eſt binarius; eſſe verò æqualem illius ſemiſſi, trienti, aut

quadranti, prout idem ille numeru
rit ternarius, quaternarius, aut q
rius.

Ergo ſi talis conſtituatur prog
geometrica, ut primus terminus ſi
ab aliquo numero denominata data
cujus quantitatis, & omnis alius
pars ſui antecedentis, quam idem n
rus deſignat; vi oſtenſi theorematis
ma omnium infinitorum termin
erit æqualis fractioni, cujus num
eſt data quantitas, denominator ve
idem ille numerus, unitate min
Quocirca quemadmodum hæc f
evadit infinita, quum numerus ill
tatem adæquat; & verò manet quid
nita, ſed mutatur in negativam,
idem numerus eſt major unitate: ita
que neceſſe eſt, ut ſumma omnium
nitorum terminorum illius progre
geometricæ ſit quantitas infinita,
numerus partem denominans eſt æ
unitati; & ut ſit quantitas finita n
va, quum idem ille numerus p
minor unitate.

Horum primum liquidò patet
quotieſcumque numerus partem de
nans unitatem adæquat, termini pr
ſionis geometricæ haud quidem p

tionaliter decreſcunt, ſed iidem ſemper perſeverant: proindeque ſumma omnium erit infinita, quum non ſit aliud, quàm eadem quantitas infinities ſumpta. Sed alterum non ita liquet abundè; nam quotieſcumque idem ille numerus partem denominans ponitur unitate minor, termini progreſſionis geometricæ, velut creſcentes in infinitum, conſtituunt ſimul collecti quantitatem infinitam poſitivam; adeoque ſi illud verum eſſet, neceſſe foret, ut quantitas finita negativa tantundem valeat, ac quantitas infinita poſitiva.

Et quidem ratione oppoſitionis, quæ inter quantitatem poſitivam, & negativam reperitur, rem non aliter ſe habere primò judicavi, eòque magis, quod eodem artificio colligere quoque licet, quantitatem finitam poſitivam tantundem valere, ac quantitas infinita negativa. Sed deinde geneſim illius ſeriei infinitæ, cujus termini progreſſionem geometricam creſcentem videntur conſtituere, ſedulò conſiderans, novi naturam ejus hanc eſſe, ut ad quemcumque terminum elevetur, ſemper ab eodem per totidem terminos negativos regredi debeat, uſque donec perveniat ad terminum pri-

primum, ubi neque etiam ſiſtit, ſed de ſcendit adhuc per terminos negativos: qua ratione omnes ejus termini ſimul collecti conſtituunt quantitatem finitam negativam.

Regreſſus iſte ſeriei, quum fractio, ex qua ſuam originem habet, denominatorem habet negativum, latuit Clariſſimum Wallifium: unde arbitratus eſt ſummam illius ſeriei, ipſamque adeo fractionem quantitatem eſſe, non quidem finitam negativam, ſed pluſquam infinitam. In hunc autem errorem eò magis eum induxit vulgaris de quantitatibus negativis opinio, quod eſſent nihilo minores. Nam, quum noverit, quantitatem per fractionem deſignatam eſſe infinitam, quum denominator ejus evaneſcit; facile ſibi perſuaſit eſſe pluſquam infinitam, quum idem denominator evadit negativus. Unde, quum contrarium conſtet, concludendum eſt, quantitates negativas eſſe nihilo majores, perinde ac ſunt quantitates poſitivæ, & zero, ſive nihilum eſſe ultimum terminum, ad quem quantitates decreſcendo poſſint perveniri.

Atque hinc porrò nata ſpatia Walliſiana pluſquam infinita, adversùs quæ ſcripſit Petrus Warignonius, Mathematicus Pari-

Digitized by Google

Pariſienſis. Nam, quum dimenſionem quæreret ſpatiorum, quæ hyperbolæ, ſive potiùs hyperboliſmi cum ſuis aſymptotis cõtinent; novit eorum nonnulla deſignari per fractiones, denominatores negativos habentes: unde collegit, ſpatia illa eſſe pluſquam infinita. Et quamquam laudatus Warignonius errorem detexerit Walliſii circa ſpatia iſta; quum ſolidè oſtenderit hæc ad partem contrariam ſumenda eſſe, indeque fieri, ut fractionibus exprimerentur, denominatores negativos habentibus; attamen neque ipſe novit regreſſum ſerierum, quæ ex iſtis fractionibus oriuntur, quandoquidem in monumentis Regiæ Scientiarũ Academiæ anni 1715 cautiones nonnullas proponit pro uſu ſerierum infinitarum, quas utique fuiſſet neglecturus, ſi ei regreſſus ille innotuiſſet.

Tertiò conſideramus ſeries, quarum termini progreſſionem conſtituunt arithmeticam. Nam etſi ſumma infinitorum terminorum iſtarum ſerierum, velut infinita, nequeat inveniri; attamen quam ſummam conſtituant quamplures termini ſimul collecti, facile eſt quidem definire. Itaque cognito priori termino progreſſionis arithmeticæ creſcentis, & cognitâ item

item differentiâ, qua termini progrediuntur, oſtendimus ſummam quotcumque terminorum haberi poſſe per hanc regulam: capiatur prior terminus toties, quot ſunt termini in unum addendi, tunc ei addatur differentia progreſſionis toties, quoties deſignat ſemiſſis producti ex eodem numero terminorum in ſe ipſum unitate multatum, & habebitur ſumma quæſita. Sed ſi progreſſio arithmetica fuerit decreſcens, tunc quidem oſtendimus, differentiam illam progreſſionis toties ſumptã, quoties deſignat ſemiſſis dicti producti, ſubducendam eſſe ex priori termino toties accepto, quot ſunt termini in unum addendi, ut habeatur ſumma quæſita terminorum.

Hæc autem oſtendentes, inopinatò in hoc incidimus theorema univerſalitate ſua à nemine adhuc adnotatum, quod ſumma omnium infinitorum terminorum cujuſcumque progreſſionis arithmeticæ, ſive creſcentis, ſive decreſcentis, ſit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubduplâ. Etſi enim elegans iſtud theorema iis, qui infinitorum tractarunt Arithmeticam, innotuerit in uno caſu ſpeciali, nempe quum termini progreſſionis arithmeticæ ſunt nu-

numeri naturales; univerſalitatem tamen ejus, quantum ſciam, nemo hactenus adnotavit. Et quoniam in numeris naturalibus veritas præfati theorematis pendet ex hac illarum proprietate, quod quum ii incipiunt à nihilo, ſumma quotcumque terminorum ſit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium, ut unitas ad binarium; viſum eſt non abs re eſſe eodem in loco proprietatis hujus numerorum naturalium rationem paucis innuere; ubi etiam notamus, proprietatem iſtam numeris naturalibus non aliâ ratione competere, quàm quia conſtituunt progreſſionem arithmeticam, cujus prior terminus eſt zero, ſive nihilum.

Quartò conſideramus ſeries infinitas, quarum termini ſunt numeri, qui vulgò dicuntur figurati; ſed priùs exhibemus brevem quandam ideam iſtorum numerorum, quorum conſideratio profecta eſt ex contemplatione numerorum multangulorum, ab ipſis Veteribus factâ. Itaque docemus numeros multangulos, ſive polygonos Veteres dixiſſe illos, qui oriuntur ex continuâ collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; & pro diverſitate hujus intervalli varias diſtinxiſſe ſpecies numerorum mul-

multangulorum: nam vocarunt eos triangulos, quum intervallum eſt unitas; vocarunt quadratos, quum intervallum eſt binarius; vocarunt pentagonos, quum idem intervallum eſt ternarius; atque ita deinceps. Sed ſubjungimus quoque, qua ratione hujuſmodi numeros multangulos, ſive polygonos Veteres appellarunt: nempe, quia ipſorum unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam diſponi poſſunt.

Docemus deinde, quod ſicuti Veteres conſiderarunt numeros, qui oriuntur ex continuâ collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, eoſque vocarunt multangulos, ſive polygonos, quia unitates ipſorum per æqua intervalla diſpoſitæ, multangulum, ſive polygonum æquilaterum repræſentant; ſic Recentiores ulteriùs progreſſi conſideraverint numeros alios, qui generantur ex continuâ ipſorum multangulorum, aliorumque inde ortorum numerorum additione, vel collectione; & tam hos, quàm illos figuratos appellaverint, quia ſcilicet unitatibus ipſorum, per æqua intervalla diſpoſitis, diverſimodè poſſunt cõfigurari. Unde quum numeri figurati dicantur nõ modò ii, qui oriutur ex continuâ collectio-

ctione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, verùm etiam, qui ex continuâ inde ortorum numerorũ additione generantur; deducimus hinc numeros figuratos non modò in varia genera diſtingui poſſe, pro diverſitate intervalli, quo numeri genitores, hoc eſt ab initio aſſumpti ab unitate progrediuntur; ſed & ipſos cujuſque generis numeros in varios ordines dividi poſſe, pro diversâ ratione, qua ex iiſdem illis numeris genitoribus, ſive ab initio aſſumptis generari intelliguntur.

Interim non de omnibus numeris figuratis agendum aggredimur, ſed de iis tantùm, qui ſut generis primi, quique oriuntur à numeris, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur. Atque hos in certos ordines ita dividimus, ut quemadmodum dicuntur genitores ipſi illi numeri, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur; ita dici debeant figurati ordinis primi, qui oriuntur ex additione continuâ ipſorum genitorum; figurati ordinis ſecundi, qui oriuntur ex collectione continuâ figuratorum primi ordinis; atque ita deinceps. Et quamquam cujuſcumque ſint ordinis numeri figurati, ii in infinitum continuati

nuati conſtituant ſimul collecti quantitatem infinitam; conſideramus tamen ſeries infinitas, quarum termini, aut etiam coefficientes terminorum ſunt numeri iſti: quia ſicuti in unum colligere licet quotcumque numerorum naturalium, ex quibus ii ſuam originem habent; ita poterit quotcumque eorum numerorum finita ſemper ſumma inveniri.

Jam ad has numerorũ figuratorũ ſummas inveniendas, præmittimus primò hanc ipſorum proprietatem, quod ſicùti in numeris natururalibus præfixo unitati, ſive primo termino unico zero, ſumma terminornm aliquot eſt ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubduplâ; ita in numeris figuratis, ſi primo termino tot zero præfigantur, quot deſignat exponens ordinis numerorum auctus unitate unâ, ſumma terminorum aliquot ſit ad ſummam ex totidem terminis, quorum quiſque maximum adæquet, ut unitas ad eundem exponentem auctum duabus unitatibus: qua proprietate ſuppoſitâ, invenimus ſummas prædictas, faciendo duas progreſſiones arithmeticas, ambas aſcendentes per unitatis incrementum, unam quidem à multitudine terminorum in unam

ſum-

ſummam colligendorum, alteram ab unitate, & utramq; tot terminorum, quot deſignat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus; nam multiplicando deinde inter ſe mutuò, tam terminos prioris progreſſionis, quàm terminos alterius, & dividendo productum ex primis per productum ex ſecundis, habebitur in quotiente ſumma quæſita.

Proprietatis hujus numerorum figuratorum primus, qui demonſtrationem dederit univerſalem, & ſcientificam, fuit Jacobus Bernoullius, Mathematicus Celeberrimus; ſed quum ejus ſuo Fratri Johanni Bernoullio copiam feciſſet, animadvertit iſte poſſe demonſtrationem eleganter abbreviari; quam rurſus nitidiorem nos reddere conati ſumus, præmiſſo velut lemmate theoremate quodam generale. Cæterùm, quemadmodum ſumma numerorum omnium naturalium eſt ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubduplâ; ita quoque ex eadem illâ proprietate deducimus ſummam numerorum omnium figuratorum cujuſque ordinis eſſe ad ſummam ex totidem terminis, quorum quiſque maximum adæquet, ut eſt unitas ad exponentem ordinis eorum numerorum, dua-

bus unitatibus auctum.

Quartò conſideramus ſeries infinitas, quarum termini ſunt poteſtates, hoc eſt quadrata, cubi, quadrato-quadrata numerorum naturalium; nam tametſi hujuſmodi ſeries tales ſint quoque, ut in infinitum continuatæ numquam poſſint finitam ſummam exhibere; utilis tamen eſt earum contemplatio, quia tametſi ſumma omnium infinitorum terminorũ, velut infinita, haberi nequeat, nihilominus quæ ſumma oriatur ex quamplurium terminorum additione, haud difficile eſt definire. Utimur autem ad has ſummas definiendas ſummis jam determinatis numerorum figuratorum. Nam etſi Walliſius, aliique, qui infinitorum tractarunt Arithmeticam, primò ſummas quadratorum, cuborum, aliarumque poteſtatum numerorum naturalium inveſtigaverint, deinde verò ad definiendas ſummas numerorum figuratorum pertranſierint; nihilominus notante Jacobo Bernoullio naturæ rei longè meliùs convenire videtur, ſi primò quidem numerorum figuratorum ſummæ determinentur, poſtea verò ad poteſtatum ſummas inveſtigandas deſcendatur.

Jam quemadmodum ſumma numero-

rum

rum omnium naturalium eſt ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubduplâ ; ita oſtendimus ſummam quadratorum omnium, quæ fiunt ex numeris naturalibus, eſſe ad ſummam totidem maximo æqualium in ratione ſubtriplâ ; & ſummam cuborum omnium, qui fiunt ex iiſdem numeris naturalibus, eſſe ad ſummam totidem æqualium maximo in ratione ſubquadruplâ ; atque ita deinceps : ex quibus plura alia theoremata colligimus, proportionem inter numeros figuratos, & poteſtates numerorum naturalium exhibentia, quæ neſcio an adhuc ab Auctore aliquo ſint adnotata. Nec reticemus pulcherrimam proprietatem, quam in ſummis indefinitis tam poteſtatum, quàm numerorum figuratorum Jacobus Bernoullius obſervavit : nempe quod ſi propriis ſuis ſignis addantur in unum fractiones illæ, quæ in ſummis illis ſunt terminorum coefficientes, ſumma, quæ inde oritur, ſit ubique unitas.

Denique ſerierum infinitarum exempla alia proferimus. Et primò quidem oſtendimus, quod tametſi ſeries infinitæ, quarum termini ſunt, vel numeri naturales, vel numeri figurati numerorum

naturalium, in infinitum continuatæ, numquam poſſint finitas ſummas exhibere; nihilominus ſi termini earum ſerierum dividantur ordine per terminos alterius ſeriei, cujus termini creſcendo geometricè progrediantur, vel quod eodem recidit, multiplicentur per terminos novæ ſeriei, progredientes geometricè decreſcendo, quod inquam id, quod oritur ex infinitorum illorum terminorum collectione, ſit ſemper quantitas finita. Et quamquam hujus rei veritatem oſtendamus, determinando ſpeciatim ſummas illas pro unoquoque ordine numerorum figuratorum; deinde tamen regulam proferimus generalem, quæ ad omnes caſus ſe extendit.

Oſtendimus etiam circa numeros iſtos figuratos, quod etſi ſumma ipſorum, cujuſcumque ſint ordinis, ſit infinita, attamen ſi invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro ſuo numeratore, iidem ſimul collecti ſummam exhibeant finitam. Reducimus autem hanc numerorum figuratorum proprietatem ad iſtud theorema generale, quod in numeris figuratis inverſis ſumma omnium terminorum, qui primùm excipiunt, eam uni-

nitatis partem adæquet, quam deſignat exponens ordinis numerorum. Notamuſque, quod ſi ipſi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum eâ ratione collocentur, ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum, poſſit idem theorema iis etiam numeris applicari: adeo, ut ſi invertantur numeri naturales, & conſtituatur ex eorum inverſione ſeries harmonica, dici poſſit, quod termini omnes hujus ſeriei, qui primùm excipiunt, ſimul collecti eam unitatis partem adæquent, quam deſignat zero, ſive nihilum; adeoque, quod ſumma omnium illorum terminorum ſit quantitas infinita, quum dividendo finitum per zero, ſive nihil, infinitum oriatur.

Infinitam autem eſſe ſummam terminorum omnium conſtituentium ſeriem harmonicam deprehendit primò Johannes Bernoullius ex abſurditate manifeſtâ, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei harmonicæ finita ſtatueretur. Idem deinde demonſtravit aliâ ratione Jacobus Bernoullius, Jacobi Frater. Sed id velut prorſus memorabile tripliciter quidem à nobis oſtenditur; primò demonſtrando ſeriem harmonicam talem eſſe, ut à ſe ipsâ primo termino multatâ non differat; ſecun-

dò oſtendendo ſeriem, quæ oritur ex inverſione numerorum imparium, æqualem eſſe ſeriei, ortæ ex numeris paribus inverſis; & tertiò demonſtrando ſummam ſeriei harmonicæ hujuſmodi eſſe, ut abſciſsâ ex eâ unitate unâ, alia rurſus, atque alia in infinitum poſſit abſcindi: quorum quidem omnium unumquodque in propatulo ponit, ſummam terminorum omnium, ſeriem harmonicam conſtituentium, quantitatem eſſe infinitam.

Tandem oſtendimus ſummam finitam illius ſeriei, quæ oritur ex inverſione quadratorum unitate minutorum, indicatam à Viro Clariſſimo Gulielmo Gotofredo Leibnitio occaſione mirabilis ſuæ quadraturæ circuli in principio Auctorum Lipſienſium publicatæ. Nam, quum hujuſmodi ſeries ſit ſemiſſis ejus, quæ oritur, ſubtrahendo ex terminis ſeriei harmonicæ terminos ejuſdem ſeriei duobus primis multatæ; perſpicuum eſt, ſummam omnium ſuorum terminorum eſſe ſemiſſem duorum priorum ſeriei harmonicæ, atque adeo tres quartas partes unitatis adæquare. Sed oſtendimus etiam, quod ſi ex eadem ſerie excerpas terminos loco pari poſitos, ſumma ſeriei reliquæ ſemiſſem unitatis adæqnæt. Verumtamen ſi

ex

ex poſtremâ iſtâ ſerie excerpas adhuc terminos *loco pari* collocatos, relinquetur ſeries, cujus ſumma finita, nullo numero exprimibilis, erit vera magnitudo circuli poſito, quod quadratum circulo circumſcriptum adæquet ſemiſſem unitatis.

Quoniam autem in explicandâ ſerierum infinitarum doctrinâ longè quidem morati ſumus, quàm noſtrum erat animus, & ſuſcepti operis ratio exigere videbatur: proinde, ut pateret non omninò inutilia eſſe, quæ prætermitti potuiſſe facile quiſque ſibi perſuadet; operæ pretium nobis viſum eſt, doctrinæ de ſeriebus infinitis formulam quandam generalem ſubnectere, qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope poſſit quæcumque quantitas duabus partibus conſtans ad datam quamcumque poteſtatem elevari; atque hac quidem poteſtatum formulâ primò noſtræ Algebræ libro finem imponimus. Itaque præmiſſo prius qua ratione poteſtates generaliter, ac indefinitè deſignari poſſint in quantitatibus ſimplicibus; oſtendimus deinde, qua ratione hoc idem fieri poſſit in quantitatibus compoſitis, hoc eſt in iis, quæ duabus partibus conſtant. Et quoniam poteſtates quantitatum compoſitarum plures terminos in-

volvunt, quorum ſinguli ſuos habent coefficientes; propterea primò quidem oſtendimus, qua ratione deſignari debeant generaliter, ac indefinitè termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliquâ binomiâ, tum quo pacto deſignandi ſint itidem generaliter, ac indefinitè coefficientes eorum terminorum.

Expreſſis generaliter, ac indefinitè tum terminis cujuſcumque poteſtatis ex radice aliquâ binomiâ, cum coefficientibus eorundem terminorum; facile deinde nobis fuit formulam poteſtatum generalem exhibere, nimirum afficiendo ordine ſingulos terminos propriis ſuis coefficientibus, eoſque iis ſignis inter ſe mutuò conjungendo, quæ multiplicationis exigunt regulæ. Hæc autem formula etſi pro iis tantùm poteſtatibus conſtructa videatur, quæ dici debent perfectæ poſitivæ, poteſt nihilominus aliis etiam poteſtatibus applicari. Quod ut liquidò conſtet, primò quidem oſtendimus, qua ratione formulæ illius beneficio elevetur radix aliqua, cujus duæ ſunt partes ad poteſtatem, quæ exponentem habeat numerum integrum negativum; tum deinde quo pacto elevetur ad poteſtatem, cujus exponens ſit numerus

fra-

Digitized by Google

fractus, ſive poſitivus, ſive negativus. Unde compertum unicuique ſit ejuſdem formulæ generalis beneficio, nullo negotio fieri poſſe ſeries infinitas, quæ cùm à diviſione, tum à radicum extractione ſuam trahunt originem.

Primum hunc Algebræ librum quum tranſmiſiſſem ad Virũ Clariſſimum Ceſarem Cinque, qui apud Monachos Caſſinenſes Medicinæ Artis praxim profitetur; Auctor ipſe mihi fuit, ut eodem in libro Appendicis inſtar agerem de numeris figuratis aliorum generum, & de eorundem ſummis indefinitis, ne quicquam horum numerorum fugeret Lectores. Itaque, quia tanto Viro, non modò Medico, & Philoſopho eximio, verùm etiam Mathematico præſtantiſſimo, non poteram morem non gerere; proinde Appendicem illam adornare ſtatim cogitavi. Quocirca detectâ in aliis iſtis numeris figuratis mirâ quadam proprietate, per quam facili negotio ex iis, qui ſunt primi generis, deducuntur; facile nobis fuit beneficio illius proprietatis definire ſummas numerorum, qui in aliis generibus ſingulos figuratorum ordines conſtituunt, quæ quidem ſummæ neſcio num ab Auctore aliquo hucuſque fuerint determinatæ.

Digitized by Google

bus unitatibus auctum.

Quartò conſideramus ſeries infinitas, quarum termini ſunt poteſtates, hoc eſt quadrata, cubi, quadrato-quadrata numerorum naturalium; nam tametſi hujuſmodi ſeries tales ſint quoque, ut in infinitum continuatæ numquam poſſint finitam ſummam exhibere; utilis tamen eſt earum contemplatio, quia tametſi ſumma omnium infinitorum terminorū, velut infinita, haberi nequeat, nihilominus quæ ſumma oriatur ex quamplurium terminorum additione, haud difficile eſt definire. Utimur autem ad has ſummas definiendas ſummis jam determinatis numerorum figuratorum. Nam etſi Wallifius, aliique, qui infinitorum tractarunt Arithmeticam, primò ſummas quadratorum, cuborum, aliarumque poteſtatum numerorum naturalium inveſtigaverint, deinde verò ad definiendas ſummas numerorum figuratorum pertranſierint; nihilominus notante Jacobo Bernoullio naturæ rei longè meliùs convenire videtur, ſi primò quidem numerorum figuratorum ſummæ determinentur, poſtea verò ad poteſtatum ſummas inveſtigandas deſcendatur.

Jam quemadmodum ſumma numero-

rum

rum omnium naturalium eſt ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubduplâ ; ita oſtendimus ſummam quadratorum omnium, quæ fiunt ex numeris naturalibus, eſſe ad ſummam totidem maximo æqualium in ratione ſubtriplâ ; & ſummam cuborum omnium, qui fiunt ex iiſdem numeris naturalibus, eſſe ad ſummam totidem æqualium maximo in ratione ſubquadruplâ ; atque ita deinceps : ex quibus plura alia theoremata colligimus, proportionem inter numeros figuratos, & poteſtates numerorum naturalium exhibentia, quæ neſcio an adhuc ab Auctore aliquo ſint adnotata. Nec reticemus pulcherrimam proprietatem, quam in ſummis indefinitis tam poteſtatum, quàm numerorum figuratorum Jacobus Bernoullius obſervavit : nempe quod ſi propriis ſuis ſignis addantur in unum fractiones illæ, quæ in ſummis illis ſunt terminorum coefficientes, ſumma, quæ inde oritur, ſit ubique unitas.

Denique ſerierum infinitarum exempla alia proferimus. Et primò quidem oſtendimus, quod tametſi ſeries infinitæ, quarum termini ſunt, vel numeri naturales, vel numeri figurati numerorum

naturalium, in infinitum continuatæ, numquam poſſint finitas ſummas exhibere; nihilominus ſi termini earum ſerierum dividantur ordine per terminos alterius ſeriei, cujus termini creſcendo geometricè progrediantur, vel quod eodem recidit, multiplicentur per terminos novæ ſeriei, progredientes geometricè decreſcendo, quod inquam id, quod oritur ex infinitorum illorum terminorum collectione, ſit ſemper quantitas finita. Et quamquam hujus rei veritatem oſtendamus, determinando ſpeciatim ſummas illas pro unoquoque ordine numerorum figuratorum; deinde tamen regulam proferimus generalem, quæ ad omnes caſus ſe extendit.

Oſtendimus etiam circa numeros iſtos figuratos, quod etſi ſumma ipſorum, cujuſcumque ſint ordinis, ſit infinita, attamen ſi invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro ſuo numeratore, iidem ſimul collecti ſummam exhibeant finitam. Reducimus autem hanc numerorum figuratorum proprietatem ad iſtud theorema generale, quod in numeris figuratis inverſis ſumma omnium terminorum, qui primùm excipiunt, eam uni-

nitatis partem adæquet, quam deſignat exponens ordinis numerorum. Notamuſque, quod ſi ipſi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum eâ ratione collocentur, ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum, poſſit idem theorema iis etiam numeris applicari: adeo, ut ſi invertantur numeri naturales, & conſtituatur ex eorum inverſione ſeries harmonica, dici poſſit, quod termini omnes hujus ſeriei, qui primùm excipiunt, ſimul collecti eam unitatis partem adæquent, quam deſignat zero, ſive nihilum; adeoque, quod ſumma omnium illorum terminorum ſit quantitas infinita, quum dividendo finitum per zero, ſive nihil, infinitum oriatur.

Infinitam autem eſſe ſummam terminorum omnium conſtituentium ſeriem harmonicam deprehendit primò Johannes Bernoullius ex abſurditate manifeſtâ, quæ ſequeretur, ſi ſumma ſeriei harmonicæ finita ſtatueretur. Idem deinde demonſtravit aliâ ratione Jacobus Bernoullius, Jacobi Frater. Sed id velut prorſus memorabile tripliciter quidem à nobis oſtenditur; primò demonſtrando ſeriem harmonicam talem eſſe, ut à ſe ipſâ primo termino multatâ non differat; ſecundò

dò oſtendendo ſeriem, quæ oritur ex inverſione numerorum imparium, æqualem eſſe ſeriei, ortæ ex numeris paribus inverſis; & tertiò demonſtrando ſummam ſeriei harmonicæ hujuſmodi eſſe, ut abſciſsâ ex eâ unitate unâ, alia rurſus, atque alia in infinitum poſſit abſcindi: quorum quidem omnium unumquodque in propatulo ponit, ſummam terminorum omnium, ſeriem harmonicam conſtituentium, quantitatem eſſe infinitam.

Tandem oſtendimus ſummam finitam illius ſeriei, quæ oritur ex inverſione quadratorum unitate minutorum, indicatam à Viro Clariſſimo Gulielmo Gotofredo Leibnitio occaſione mirabilis ſuæ quadraturæ circuli in principio Auctorum Lipſienſium publicatæ. Nam, quum hujuſmodi ſeries ſit ſemiſſis ejus, quæ oritur, ſubtrahendo ex terminis ſeriei harmonicæ terminos ejuſdem ſeriei duobus primis multatæ; perſpicuum eſt, ſummam omnium ſuorum terminorum eſſe ſemiſſem duorum priorum ſeriei harmonicæ, atque adeo tres quartas partes unitatis adæquare. Sed oſtendimus etiam, quod ſi ex eadem ſerie excerpas terminos loco pari poſitos, ſumma ſeriei reliquæ ſemiſſem unitatis adæquet. Verumtamen ſi

ex

Digitized by Google

ex poſtremâ iſtâ ſerie excerpas adhuc terminos loco pari collocatos, relinquetur ſeries, cujus ſumma finita, nullo numero exprimibilis, erit vera magnitudo circuli poſito, quod quadratum circulo circumſcriptum adæquet ſemiſſem unitatis.

Quoniam autem in explicandâ ſerierum infinitarum doctrinâ longè quidem morati ſumus, quàm noſtrum erat animus, & ſuſcepti operis ratio exigere videbatur: proinde, ut pateret non omninò inutilia eſſe, quæ prætermitti potuiſſe facile quiſque ſibi perſuadet; operæ pretium nobis viſum eſt, doctrinæ de ſeriebus infinitis formulam quandam generalem ſubnectere, qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope poſſit quæcumque quantitas duabus partibus conſtans ad datam quamcumque poteſtatem elevari; atque hac quidem poteſtatum formulâ primò noſtræ Algebræ libro finem imponimus. Itaque præmiſſo prius qua ratione poteſtates generaliter, ac indefinitè deſignari poſſint in quantitatibus ſimplicibus; oſtendimus deinde, qua ratione hoc idem fieri poſſit in quantitatibus compoſitis, hoc eſt in iis, quæ duabus partibus conſtant. Et quoniam poteſtates quantitatum compoſitarum plures terminos involvunt-

volvunt; quorum ſinguli ſuos habent coefficientes; propterea primò quidem oſtendimus, qua ratione deſignari debeant generaliter, ac indefinitè termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliquâ binomiâ, tum quo pacto deſignandi ſint itidem generaliter, ac indefinitè coefficientes eorum terminorum.

Expreſſis generaliter, ac indefinitè tum terminis cujuſcumque poteſtatis ex radice aliquâ binomiâ, cum coefficientibus eorundem terminorum; facile deinde nobis fuit formulam poteſtatum generalem exhibere, nimirum afficiendo ordine ſingulos terminos propriis ſuis coefficientibus, eoſque iis ſignis inter ſe mutuò conjungendo, quæ multiplicationis exigunt regulæ. Hæc autem formula etſi pro iis tantùm poteſtatibus conſtructa videatur, quæ dici debent perfectæ poſitivæ, poteſt nihilominus aliis etiam poteſtatibus applicari. Quod ut liquidò conſtet, primò quidem oſtendimus, qua ratione formulæ illius beneficio elevetur radix aliqua, cujus duæ ſunt partes ad poteſtatem, quæ exponentem habeat numerum integrum negativum; tum deinde quo pacto elevetur ad poteſtatem, cujus exponens ſit numerus fra-

fractus, ſive poſitivus, ſive negativus. Unde compertum unicuique ſit ejuſdem formulæ generalis beneficio, nullo negotio fieri poſſe ſeries infinitas, quæ cùm à diviſione, tum à radicum extractione ſuam trahunt originem.

Primum hunc Algebræ librum quum tranſmiſiſſem ad Virũ Clariſſimum Ceſarem Cinque, qui apud Monachos Callinenſes Medicinæ Artis praxim profitetur; Auctor ipſe mihi fuit, ut eodem in libro Appendicis inſtar agerem de numeris figuratis aliorum generum, & de eorundem ſummis indefinitis, ne quicquam horum numerorum fugeret Lectores. Itaque, quia tanto Viro, non modò Medico, & Philoſopho eximio, verùm etiam Mathematico præſtantiſſimo, non poteram morem non gerere; proindè Appendicem illam adornare ſtatim cogitavi. Quocirca detectâ in aliis iſtis numeris figuratis mirâ quadam proprietate, per quam facili negotio ex iis, qui ſunt primi generis, deducuntur; facile nobis fuit beneficio illius proprietatis definire ſummas numerorum, qui in aliis generibus ſingulos figuratorum ordines conſtituunt, quæ quidem ſummæ neſcio num ab Auctore aliquo hucuſque fuerint determinatæ.

IN-

INDEX

CAPITUM, ET ARTICULORUM LIBRI PRIMI.

De calculo litterali, ſive ſpecioſo.

CAP. I.

Calculus quantitatum ſimplicium.
I. *Additio quantitatum ſimplicium.*
II. *Subtractio quantitatum ſimplicium.*
III. *Multiplicatio quantitatum ſimplicium.*
IV. *Diviſio quantitatum ſimplicium.*

CAP. II.

Calculus quantitatum compoſitarum.
I. *Additio quantitatum compoſitarum.*
II. *Subtractio quantitatum compoſitarum.*

III. *Multiplicatio quantitatum compoſitarum.*
IV. *Diviſio quantitatum compoſitarum.*

CAP. III.

Calculus fractionum.

I. *Additio fractionum.*
II. *Subtractio fractionum.*
III. *Multiplicatio fractionum.*
IV. *Diviſio fractionum.*
V. *Reductio fractionum ad eandem denominationem.*

CAP. IV.

Formatio poteſtatum.

I. *Definitio, ordo, ac geneſis poteſtatum.*
II. *Elevatio quantitatum ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem.*
III. *Elevatio quantitatum ad cubum, ſive tertiam poteſtatem.*
IV. *Elevatio quantitatum ad poteſtates alias ſuperiores.*

CAP. V.

Extractio Radicum

I. Ex-

Digitized by Google

I. *Extractio radicis quadratæ.*
II. *Extractio radicis cubicæ.*
III. *Extractio aliarum radicum.*
IV. *Extractio radicum ex fractionibus.*
V. *Geneſis quantitatum incommenſurabilium.*

CAP. VI.

Poteſtatum idea generalior exhibetur.
I. *De naturâ progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ.*
II. *Analogia inter progreſſionem arithmeticam, & geometricam.*
III. *Natura poteſtatum poſitivarum, & negativarum.*
IV. *Natura poteſtatum perfectarum, & imperfectarum.*
V. *Calculus poteſtatum per exponentes.*

CAP. VII.

Calculus radicalium ſimplicium.
I. *Additio radicalium ſimplicium.*
II. *Subtractio radicalium ſimplicium.*
III. *Multiplicatio radicalium ſimplicium.*
IV. *Diviſio radicalium ſimplicium.*
V. *Formatio poteſtatum in radicalibus ſimplicibus.*

VI. *Extractio radicum ex radicalibus ſimplicibus.*
VII. *Reductio radicalium ſimplicium ad eandem denominationem.*

CAP. VIII.

Calculus radicalium compoſitarum.

I. *Additio radicalium compoſitarum.*
II. *Subtractio radicalium compoſitarum.*
III. *Multiplicatio radicalium compoſitarum.*
IV. *Elevatio radicalium compoſitarum ad quamcumque poteſtatem.*
V. *Præparatio ad diviſionem radicalium compoſitarum.*
VI. *Diviſio radicalium compoſitarum.*

CAP. IX.

Extractio radicum ex binomiis.

I. *Extractio radicis quadratæ ex binomiis.*
II. *Extractio radicis cubicæ ex binomiis.*
III. *Extractio aliarum radicum ex binomiis.*
IV. *Geneſis, & calculus radicalium, quæ dicuntur univerſales.*

CAP.

CAP. X

De quantitatibus imaginariis.

I. *Natura quantitatum poſitivarum, & negativarum paulò clariùs oſtenditur.*

II. *Quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, impoſſibilitas oſtenditur.*

III. *Calculus quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, exponitur.*

IV. *Alia quædam de quantitatibus imaginariis offeruntur.*

CAP. XI.

De quantitatibus indefinitè magnis, & parvis; ubi etiam de ſeriebus infinitis.

I. *Geneſis ſerierum infinitarum oſtenditur.*

II. *De ſeriebus infinitis, quarum termini conſtituunt progreſſionem geometricam.*

III. *De ſeriebus infinitis, quarum termini conſtituunt progreſſionem arithmeticam.*

IV. *De ſeriebus infinitis, quarum termini ſunt numeri figurati numerorum naturalium.*

V. *De ſeriebus infinitis, quarum termini ſunt poteſtates numerorum naturalium.*

VI. *Serierum infinitarum exempla alia afferuntur.*

CAP. XII.

Poteſtatum formula generalis.

I. *Terminorum cujuſcumque poteſtatis generalis expreſſio.*

II. *Coefficientium eorundem terminorum generalis expreſſio.*

III. *Generalis poteſtatum formula exhibetur.*

IV. *Uſus conſtructæ formulæ in conficiendis ſeriebus infinitis oſtenditur.*

APPENDIX.

De numeris figuratis generum omnium, & de eorundem ſummis indefinitis.

I. *De genitoribus numerorum figuratorum cujuſcumque generis in unam ſummam colligendis.*

II. *De numeris figuratis, qui primum ordinem cujuſque generis conſtituunt,*

tuunt,

tuunt, in unum addendis.
III. De ſummis numerorum, qui ſecundum figuratorum ordinem in omni genere conſtituunt.
IV. De ſummis numerorum, qui alios figuratorum ordines in unoquoque genere conſtituunt.
V. Proprietas numerorum figuratorum ſuperiùs uſurpata demonſtratur.
VI. Qua ratione in omni genere ſeries tum genitorum, cùm figuratorum cujuſque ordinis reddi poſſint ſummabiles, oſtenditur.
VII. De ſeriebus infinitis, quæ oriuntur ex inverſione omnium cujuſcumque generis, & ordinis figuratorum.
VIII. Paradoxum, quod ex doctrina præcedenti articulo tradita, ſequitur, enodatur.

AL-

ALGEBRÆ ELEMENTORUM LIBER I.

De Calculo litterali, ſivè ſpecioſo.

UT regulæ calculi litteralis, ſivè ſpecioſi meliùs intelligantur, illud in limine præmittendum, quòd ſicuti omnes quātitates poſſunt per alphabeti litteras deſignari; ità earundem multiplices, aut partes quælibet, adhibitis figuris arithmeticis, non incongruè deſignentur.

Hac ratione, ſi aliqua quantitas vocetur *a*; erit ejus duplum 2*a*; triplum 3*a*; quadruplum 4*a*; atque ita deinceps. Et ſimiliter quantitatis, deſignatæ per *b*, erit

Digitized by Google

ſemiſſis $\frac{1}{2}b$, triens $\frac{1}{3}b$, quadrans $\frac{1}{4}b$, atque ita de aliis.

Præmittendum eſt quoque, in calculo litterali, præter ipſas litteras, per quas quantitates deſignantur, adhiberi etiam hæc duo ſigna $+$, & $-$, quorum primum ſignificat plus, alterum ſignificat minus: qua ratione $a+b$ idem valet, ac a plus b; & $c-d$ idem, ac c minus d.

Et quemadmodum ultrò liquet $a+a$ idem eſſe, ac $2a$; $3a+2a$ idem, ac $5a$; ita quoque liquidò conſtat $5a - 3a$ idem eſſe, ac $2a$; $3b - 2b$ idem, ac b; & $c - c$ idem, ac zero, ſive nihilum: undè quum plures occurrunt quantitates, iis ſignis connexæ, iiſdemque litteris deſignatæ, contrahendæ ſunt illæ, habitâ ſignorum, quibus afficiuntur, ratione.

Hoc pacto ſeries iſta quantitatum $5a - 3b + 5b - 2a$ reducitur ad $3a + 2b$: nam $5a - 2a$ eſt idem, ac $3a$; & $- 3b + 5b$ eſt idem, ac $+2b$. Similiter ſeries iſta quantitatum $5m - 6n + 4n - 3m$ reducitur ad $2m - 2n$: nam $5m - 3m$ eſt idem, ac $2m$; & $- 6n + 4n$ idem eſt, ac $- 2n$. Atque ita quoque ſeries quantitatum $8a - 2c - 3c$

$+4a$ reducitur ad $12a - 5c$: nam $8a + 4a$ ſunt $12a$; & $-2c - 3c$ ſunt $-5c$.

CAPUT I.

Calculus quantitatum ſimplicium.

Quantitatum duæ ſpecies diſtinguuntur, quarum aliæ dicuntur ſimplices, aliæ compoſitæ. Quantitates ſimplices ſunt illæ, quæ vel unicâ litterâ, vel pluribus litteris nullo ſigno copulatis deſignantur, ut a, b, c; vel etiam ab, bc, cd. Quantitates verò compoſitæ, quæ pluribus litteris ſigno +, vel — conjunctis exprimuntur. Hinc primò calculum quantitatum ſimplicium, tum calculum quantitatum compoſitarum oſtendemus.

I.

Additio quantitatum ſimplicium.

Qum una quantitas alteri addenda proponitur, nihil aliud fieri debet, quàm unam plus alterâ ſumere. Hinc adduntur in unum duæ, aut plures ſimplices quantitates, conjungendo eas ſigno

$+$. Sic ad addendum a cum b, ſcribo $a+b$; pariterque ad addendum a cum b, & c, ſcribo $a+b+c$: neque aliter fiet, ſi addi debeant in unum $2a$, $3b$, $3c$; nam ſumma erit $2a+3b+3c$.

Eâdem ratione, ſi addenda proponatur quantitas a cum ſe ipſa, hoc eſt cum alia quantitate a, ſumma erit $a+a$. Sed quoniam utraque quantitas eâdem litterâ deſignatur, ſcribi poterit loco ejus $2a$. Et ſimiliter ad addendum $3a$ cum $4a$, ſcribi poterit, vel $3a+4a$, vel etiam ſimpliciùs $7a$. Atque ita quoque erit, vel $3c + 2c + 4d$, vel $5c + 4d$ ſumma trium quantitatum $3c$, $2c$, $4d$.

II.

Subtractio quantitatum ſimplicium.

Quum ex una quantitate alteram oportet ſubducere, nihil aliud fieri debet, quàm unam minus alterâ ſumere. Hinc ex una quantitate altera ſubducitur, quotieſcumque conjunguntur ita quidem ſigno $-$, ut ſignum iſtud præcedat quantitatem ſubtrahendam. Ita ad ſubtrahendum b ex a, ſcribo $a - b$; pariterque ad ſubtrahendum

c ex

c ex a, ſcribo $a - c$: neque aliter fiet, ſi ex $3a$ ſubtrahi debeat $2c$; nam reſiduum erit $3a-2c$.

Eâdem ratione, ſi ex quantitate $5a$ ſubtrahenda proponatur quantitas $3a$, reſidum erit $5a - 3a$. Sed quoniam utraque quantitas eâdem litterâ deſignatur; ſcribi poterit loco ejus $2a$. Et ſimiliter, ad ſubtrahendum $4c$ ex $7c$, ſcribi poterit, vel $7c - 4c$, vel etiam $3c$. Atque ita quoque reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $4m$ ex $9m$, erit, vel $9m - 4m$, vel ſimpliciùs $5m$.

III.

Multiplicatio quantitatum ſimplicium.

Quantitates ſimplices multiplicantur per ſe mutuò, conjungendo eas, nullo ſigno interjecto. Ita. ſi a multiplicetur per b, productum erit ab; & ſimiliter ſi a multiplicetur per c, productum erit ac; pariterque erit aa productum, quod oritur, multiplicando a per a.

Sed quemadmodum expreſſio $a+a$ contrahitur, & loco ejus ſcribitur $2a$; ita expreſſio aa contracta deſignatur per a^2:

Digitized by Google

qua ratione *aaa* deſignatur etiam per a^3; *aaaa* per a^4; atque ita deinceps : adeò ut ſemper ac quantitas aliqua occurrit, cui à tergo numerus aliquis ſit adſcriptus, intelligenda ſit quantitas illa toties per multiplicationem poſita, quot habet ille numerus unitates.

Hinc ſedulò notetur hîc velim, magnum eſſe diſcrimen inter quantitatem, cui numerus aliquis eſt præfixus, & inter eandem quantitatem, cui idem numerus eſt adſcriptus à tergo ; veluti inter $2a$, & a^2 ; inter $3a$, & a^3; inter $4a$, & a^4. Nam expreſſiones iſtæ $2a$, $3a$, $4a$ ſignificant quantitatem a bis, ter, quater poſitam eſſe per additionem ; quum tamen hæ aliæ expreſſiones a^2, a^3, a^4 ſignificent eandem quantitatem a bis, ter, quater poſitam eſſe per multiplicationem.

Jam autem, quum a^2 idem ſit, ac *aa*; & a^3 idem, ac *aaa*: liquet, ad multiplicandum a^2 per a^3, ſcribendum eſſe a^5 ; nam juxta regulam generalem, ſi *aa* multiplicetur per *aaa*, productum erit *aaaaa*, quod idem valet, ac a^5. Atque ita quoque a^3 erit productum, quod oritur, multiplicando a per a^2 ; & a^7 productum, quod provenit, multiplicando a^2 per a^5. Sed ſi multiplicari debeat a^2 per b^3, productum erit $a^2 b^3$.

Quòd

Digitized by Google

Quòd ſi quantitates, ad invicem multiplicandæ, numeros ante ſe habeant; multiplicandi ſunt ii, ut in vulgari Arithmetica: qua ratione multiplicando $2a$ per $3c$, producitur $6ac$; & ſimiliter multiplicando $3a$ per $4b$, producitur $12ab$; atque ita quoque erit $8a^5$ productum, quod oritur, multiplicando $4a^2$ per $2a^3$.

IV.

Diviſio quantitatum ſimplicium.

Diviſio deſtruit id, quod componit multiplicatio: unde ſicuti multiplicando a per b, producitur ab; ita dividendo ab per a, quotiens oritur b: proindeque diviſio quantitatum ſimplicium fieri debet, delendo diviſorem ex dividendo: adeò ut diviſo abc per a, quotiens erit bc; & diviſo a^5 per a^3, quotiens fiet a^2.

Quòd ſi autem diviſor deleri nequeat ex dividendo; tunc lineola interjecta ſcribatur infra illud ad inſtar fractionis. Sic dividendo ab per c, quotiens oritur $\frac{ab}{c}$; & ſimiliter dividendo bd per a, quotiens producitur $\frac{bd}{a}$: neque aliter inſtituen-

tuenda eſt diviſio, quum dividere oportet a^3 per c^2; nam fiet quotiens $\frac{a^3}{c^2}$.

Sed ſi diviſor, partim deleri poſſit ex dividendo, partim non item; tunc deleatur, quod deleri poteſt; & lineola interjecta ſubſcribatur, quod eſt indelebile: qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo abd per ac, erit $\frac{bd}{c}$; & ſimiliter erit $\frac{ab}{m}$ quotiens, qui producitur dividendo abc per cm; atque ita quoque erit $\frac{a^2}{c}$ quotiens, qui oritur dividendo a^3 per ac.

Quod ſi quantitates, ad dividendum propoſitæ, numeros ante ſe habeant præfixos; dividendi ſunt ii, ut in Arithmetica vulgari: qua ratione dividendo $6ac$ per $2a$, quotiens oritur $3c$; pariterque dividendo $12ab$ per $3a$, quotiens producitur $4b$; atque ita etiam erit $4am$ quotiens, qui oritur, dividendo $12a^2m^2$ per $3am$.

CAP.

CAP. II.

Calculus quantitatum compoſitarum.

OStenſo calculo quantitatum ſimplicium; ſequitur, ut oſtendamus calculum quantitatum compoſitarum, quæ ex ſimplicium additione, vel ſubtractione oriuntur. Et quoniam quantitates compoſitæ dicuntur illæ, quæ pluribus litteris ſigno +, vel — conjunctis deſignantur; duæ hinc in iis quantitatum componentium ſpecies diſtingui ſolent. Nam aliæ dicuntur poſitivæ, cujuſmodi ſunt illæ, quas ſignum + præcedit; aliæ negativæ, quales quidem ſunt eæ, quæ ſigno — afficiuntur.

Vulgatum eſt apud Algebriſtas, quantitates poſitivas eſſe nihilo majores, quantitates negativas nihilo minores. Id igitur, ut rectiùs intelligatur, ſciendum eſt zero, ſive nihilum, quantitatibus additum, earum valorem nec augere, nec minuere: quocirca quod potis eſt alicujus quantitatis valorem augere, id nihilo majus dicendum eſt; quod verò minuere, nihilo minus dici debet: unde quia quantitas poſitiva, alteri addita, auget valorem

ejus,

Digitized by Google

ejus, & viciſſim negativa minuit; idcirco quantitas poſitiva erit nihilo major, quantitas negativa nihilo minor.

Ex quo patet, quantitates dici poſitivas, vel negativas, non quidem propter ſe, ſed in ordine ad eas, de quibus valorem ſuum affirmant, vel negant; nam cæteroqui nemo, opinor, ibit inficias, quin omnis quantitas in ſe ipſa ſpectata ſit poſitiva, ſeu nihilo major. Cæterùm, quia illæ quantitates, quæ nullo ſigno afficiuntur, idem præſtant, quod quantitates affectæ ſigno +; proinde in calculo quantitatum compoſitarum quantitates ſimplices, quæ nullo ſigno afficiuntur, conſiderantur, velut affectæ ſigno +.

I.

Additio quantitatum compoſitarum.

Quantitatum compoſitarum additio fit, conjungendo eas iiſdem omnino ſignis, quibus partes ipſarum ſunt affectæ, & obſervando ſemper hæc tria. I, ut quantitates illæ, quæ nullo ſigno afficiuntur, tamquam affectæ ſigno + debeant conſiderari. II, ut quantitates illæ, quæ iiſdem litteris expreſſæ, iiſdem quo-

quoque ſignis afficiuntur, debeant addi in unam ſummam, adhibitis notis arithmeticis. Et III, ut illæ quantitates, quæ iiſdem litteris deſignatæ, contrariis ſignis afficiuntur, debeant à ſe mutuò ſubduci.

Hoc pacto, ſi quantitati $a + b$ addenda ſit quantitas $c + d$, fiet ſumma $a+b+c+d$. Et ſimiliter ſi quantitati $a - b$ addenda ſit quantitas $c - d$, ſumma orietur $a - b + c - d$. Sed ſi quantitas $a - b$ addenda ſit quantitati $a+b$, ſumma erit $2a$: nam per regulam generalem ſumma earum quantitatum eſt $a - b + a + b$, ſed $a+a$ eſt $2a$, & $- b + b$ eſt zero, ſive nihilum: quare eadem ſumma erit ſimpliciter $2a$. Atque ita quoque ſumma quantitatum $2a - 3b$, & $3a + b$, erit $5a - 2b$; quemadmodum $6a - 4c$ erit ſumma quantitatum $4a - 6c$, & $2a + 2c$; & $5a - 6d$ erit ſumma quantitatum $3a - 4d$, & $2a - 2d$.

II.

Subtractio quantitatum compoſitarum.

Quantitatum compoſitarum ſubtractio fit, conjungendo quidem eas, ut in additione; ſed mutando ſigna omnia quantitatibus ſubducendis: qua in re-

tria

tria etiam oportet obſerventur. I, ut quantitates illæ,quæ nullo ſigno afficiuntur, conſiderari debeant velut affectæ ſigno +. II, ut quantitates illæ, quæ facta ſubtractione reperiuntur iiſdem litteris expreſſæ, iiſdemque ſignis affectæ,addi debeant in unam ſummam, adhibitis notis arithmeticis. Et III, ut ſiquidem plures occurrant quantites, quæ iiſdem litteris expreſſæ, contrariis ſignis afficiantur, eæ debeant à ſe mutuò ſubduci.

Hoc pacto, ſi ex quantitate $a+b$ ſubducenda ſit quantitas $c+d$, reſiduum fiet $a + b - c - d$; & ſimiliter ſi ex quantitate $a - b$ ſubducenda ſit quantitas $c - d$, reſiduum orietur $a - b - c + d$. Sed ſi ex quantitate $a+b$ ſubducenda ſit quantitas $b - a$, reſiduum fiet $2a$; nam per regulam generalem reſiduum, quod oritur ex mutua earum quantitatum ſubductione, eſt $a+b - b + a$; ſed $a+a$ idem eſt, ac $2a$; & $+ b - b$ eſt quantitas zero æqualis: quare idem reſiduum erit ſimpliciter $2a$. Atque ita quoque, ſi ex quantitate $3a - 2b$ ſubducenda ſit quantitas $2a+3b$, reſiduum erit $a - 5b$; & ſimiliter, ſi ex quantitate $4a+5b$ ſubducenda ſit quantitas $2a - 3b$, reſiduum orietur $2a+8b$.

Un-

Unde liquet, quòd mediante ſubtractione, quemadmodum quantitates poſitivæ fiunt negativæ, ita viciſſim negativæ evadant poſitivæ. Nam ex quantitate $a+b$ ſubducta quantitate altera $c - d$, juxta regulam datam, reſiduum fit $a+b - c + d$; & profectò quemadmodum quantitas c ex poſitiva abiit in negativā, ita viciſſim quantitas d ex negativa verſa eſt in poſitivam. Quod autem ad ſubducendam quantitatem $c - d$ ex altera $a+b$, mutanda ſint ſigna quãtitatibus ſubducendis, & pro reſiduo ſcribendum $a+b-c+d$; id facilè demonſtratur. Nam quum ex quantitate $a+b$ ſubducenda ſit quantitas c, diminuta quantitate d; utiquè, ſi ex $a+b$ ſubducatur tota quantitas c, plus juſto tollitur, & reſiduum $a + b - c$ minus erit juſto reſiduo quantitate altera d; adeoque ad verum reſiduum obtinendum, oportet ei addere quantitatem d, & ſcribere $a+b-c+d$.

III.

Multiplicatio quantitatum compoſitarum.

Multiplicatio quantitatum compoſitarum fit, multiplicando ſingulas unius partes per ſingulas partes alterius, & ſcribendo producta ſigno +, quum quantitates ad invicem multiplicandæ iiſdem ſignis afficiuntur, & viciſſim ſigno —, quum contrariis ſignis ſunt affectæ. Atque hic quoque tria illa ſunt obſervanda, quæ in additione, & ſubtractione voluimus obſervata: nempe I, ut quantitates, nullo ſigno affectæ, conſiderari debeant, velut affectæ ſigno +. II, ut ſi facta multiplicatione plura occurrant producta partialia, quæ iiſdem litteris expreſſa, iiſdem quoque ſignis afficiantur, addi ea debeant in unum, adhibitis notis arithmeticis. Et III, ut ſi plura occurrant producta partialia, quæ iiſdem litteris expreſſa, ſigna habeant contraria, ea debeant à ſe mutuò ſubduci.

Hac igitur ratione, ſi quantitas $a-b$ multiplicanda ſit per aliam $c-d$, multiplico primùm a per c; & quia utraque quan-

quantitas afficitur ſigno $+$, productum ac etiam ſigno $+$ affici debet. Deinde multiplico b per c; & quia quantitates iſtæ contrariis ſignis afficiuntur, productum bc ſigno $-$ afficio. Porrò multiplico a per d; & quia harum quantitatum contraria itidem ſunt ſigna, productum ad etiam ſigno $-$ ſubſcribo. Denique multiplico b per d; quumque iſtæ quantitates iiſdem ſignis ſint affectæ, productum bd notari debet ſigno $+$: qua ratione productum totius multiplicationis erit $ac - bc - ad + bd$.

Similiter, ſi quantitas $2a + 3b$ multiplicanda ſit per quantitatem $3c - 2d$, productum fiet $6ac + 9bc - 4ad - 6bd$. Sed ſi quantitas $a + b$ multiplicari debeat per ſe ipſam, hoc eſt per $a + b$, productum erit $a^2 + 2ab + b^2$; quandoquidem per regulam generalem productum oritur $a^2 + ab + ab + b^2$, & $+ab + ab$ idem eſt, ac $+ 2ab$. Quod ſi verò quantitas $a + b$ multiplicari debeat per $a - b$, productum erit $a^2 - b^2$; nam per regulam generalem debet eſſe $a^2 + ab - ab - b^2$, & $+ ab - ab$ eſt quantitas, quæ idem valet, ac zero, ſive nihilum.

Quòd autem productum affici debeat ſigno $+$, quum quantitates ad invicem mul-

multiplicandæ iiſdem ſignis afficiuntur; & viciſſim ſigno —, quum contrariis ſignis ſunt affectæ: haud difficile eſt hujus rei rationem reddere. Nam primò, quod quantitas $a - b$, multiplicata per c, producat $ac - bc$, oſtenditur ſic: quoniam per quantitatem c multiplicanda eſt quantitas a, diminuta quantitate b; fit hinc, ut ſi a per c multiplicetur, productum ac majus ſit juſto producto, ea quidem quantitate, quæ producitur multiplicando b per c, nimirum quantitate bc: quocirca ſi quantitas iſta bc ſubducacatur ex ac, reſiduum $ac - bc$ verum productum deſignabit.

Secundò, quod quantitas $a - b$, multiplicata per quantitatem $c - d$, producat $ac - bc - ad + bd$, demonſtratur eadem ratione: quoniam per quantitatem $c - d$ multiplicanda eſt quantitas a, diminutâ quantitate b; fit hinc, ut ſi a per $c - d$ multiplicetur, productum, quod oritur $ac - ad$, majus ſit juſto producto, eâ quidem quantitate, quæ producitur multiplicando b per $c - d$, nimirum quantitate $bc - bd$: quocirca, ſi quantitas iſta $bc - bd$ ſubtrahatur ex $ac - ad$, reſiduum $ac - ad - bc + bd$ verum productum deſignabit.

Cæ-

Cæterùm nolim hîc ſilentio præterire, utile plerumque eſſe, multiplicationem quantitatum compoſitarum nequaquam prædicto modo inſtituere; ſed tantùm eam indicare, interpoſito inter ipſas quantitates ſigno iſto x, quod ſignificat hac de cauſa in, vel per. Ita, ſi multiplicanda proponatur quantitas iſta $a + b$ per quantitatem aliam $c - d$, exhiberi poterit productum hac ratione $\overline{a + b} \times \overline{c - d}$. Et ſimiliter, ſi quantitas $a + b$ multiplicanda ſit per ſe ipſam, hoc eſt per aliam quantitatem $a + b$, deſignari poterit productum hujus multiplicationis in hunc modum $\overline{a + b} \times \overline{a + b}$, vel etiam hac alia ratione $\overline{a + b}^2$: non ſecus, ac ad multiplicandas ſimul tres quantitates, quarum quælibet ſit $a + b$, ſcribi poterit, vel $\overline{a + b} \times \overline{a + b} \times \overline{a + b}$, vel etiam $\overline{a + b}^3$.

IV.

Diviſio quantitatum compoſitarum.

Diviſio quantitatum compoſitarum fit eâdem ratione, ac in Arithme-

Digitized by Google

tica vulgari. Proponatur exempli cauſâ dividenda quantitas $ac + bc + ad + bd$ per aliam $a+b$. Divido primùm ac per a; & quia multiplicato diviſore $a + b$ per quotientem c, producitur quantitas $ac + bc$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda, relinquit $ad + bd$: divido ſecundò ad per a; quumqne quantitas, quæ producitur, multiplicando diviſorem $a + b$ per alium iſtum quotientem d, ſit $ad + bd$, quæ ſubducta ex illo reſiduo, relinquit nihil; concludo quotientem totius diviſionis eſſe $c + d$.

Non diſſimiliter fieri debet diviſio, ſi quantitates, ad dividendum propoſitæ, numeros ſibi habeant præfixos. Ita, ſi velim dividere quantitatem $8a^2 + 12ab + 6ac + 9bc$ per aliam $2a + 3b$, divido primùm $8a^2$ per $2a$; & quia quotiens hujus diviſionis eſt quantitas $4a$, quæ multiplicata per diviſorem $2a + 3b$, dat pro producto quantitatem $8a^2 + 12ab$, ſubtraho quantitatem iſtam ex quantitate dividenda; & quia relinquitur $6ac + 9bc$, divido ſecundò $6ac$ per $2a$; quumque multiplicato quotiente iſtius diviſionis $3c$ per diviſorem $2a + 3b$, oriatur quantitas $6ac + 9bc$, quæ ſubducta ex illo reſiduo, relinquit zero, ſive nihilum; proinde quo-

quotiens propoſitæ diviſionis erit $4a + 3c$.

Quoniam autem quantitates, ad dividendum propoſitæ, non modò ſigno +, ſed etiam ſigno — affici poſſunt; fit hinc, ut neque etiam quotiens, qui oritur ex diviſione duarum quantitatum, affici ſemper debeat ſigno +; ſed quandoque ſigno +, quandoque verò ſigno —: unde quoad ſigna, quibus afficiendi ſunt quotientes, qui ex quantitatum diviſionibus oriuntur, hæc regula perpetuò eſt obſervanda; ut quotieſcumque quantitates, quæ inter ſe mutuò dividuntur, iiſdem ſignis ſunt affectæ, quotiens ſigno + affici debeat; quotieſcumque verò ſunt affectæ ſignis contrariis, tum quotiens ſigno — ſit afficiendus: qua ratione ſi quantitas $a^2 - b^2$ dividenda ſit per quantitatem $a + b$, quotiens erit $a-b$: nam diviſo a^2 per a, multiplicatoque quotiente a per diviſorem $a + b$, producitur $a^2 + ab$, quod utique productum, ſubductum ex quantitate dividenda, relinquit $- ab - b^2$: unde quia diviſo $- ab$ per a, multiplicatoque quotiente $- b$ per diviſorem $a + b$, producitur $- ab - b^2$, quod ſubtractum ex illo reſiduo, nihil ampliùs relinquit; proinde quotiens propoſitæ di-

Digitized by Google

diviſionis erit $a - b$.

Neque verò difficile eſt hujus regulæ rationem intelligere. Nam quotiens, per diviſorem multiplicatus, producere ſemper debet quantitatem dividendam. Itaque quotiens tali ſemper ſigno affici debet, ut ex multiplicatione ejus per diviſorem oriatur ſemper quantitas dividenda. Jam verò, ex ſuperiùs oſtenſis, quantitas poſitiva producitur ex multiplicatione duarum quantitatum, eodem ſigno affectarum; & viciſſim quantitas negativa ex mulriplicatione duarum quantitatum, quæ contrariis ſignis afficiuntur. Igitur, quum quantitas dividenda eſt poſitiva, quotiens affici debet eodem ſigno, quo diviſor afficitur; & viciſſim, quum quantitas dividenda eſt negativa, quotiens affici debet ſigno contrario ei, quo diviſor affectus reperitur: proindeque afficiendus erit quotiens ſigno +, quum quantitates ad invicem dividendæ afficiuntur iiſdem ſignis; & viciſſim ſigno —, quotieſcumque contrariis ſignis ſunt affectæ.

Quod ſi accidat, ut diviſio quantitatum compoſitarum tali modo fieri nequeat; eo caſu quantitati dividendæ poterit ad inſtar fractionis diviſor ipſe ſubſcri-

ſcribi: qua ratione, dividendo quantitatem $a^2 + c^2$ per $m + n$, deſignari poterit quotiens in hunc modum $\frac{a^2 + c^2}{m + n}$.

CAP. III.

Calculus Fractionum.

Quemadmodum ex additione, & ſubtractione quantitatum ſimplicium oriuntur quantitates compoſitæ; ita ex diviſione quantitatum, tam ſimplicium, quàm compoſitarum oriuntur fractiones, ſive quantitates fractæ. Unde quum calculus quantitatum, tùm ſimplicium, cùm compoſitarum abundè à nobis ſit explicatus; oſtendendus eſt modò calculus fractionum, quæ ex illarum diviſione proficiſcuntur.

Fractiones itaque ſunt quantitates, deſignantes quotientes earum diviſionum, quæ peragi non poſſunt. Ita, quia quantitas ab dividi nequit per c, fiet quotiens hujus diviſionis fractio $\frac{ab}{c}$. Et ſimiliter quia quantitas $a^2 + c^2$ dividi non poteſt

per $m + n$, fiet quotiens talis diviſionis fractio $\frac{a^2 + c^2}{m + n}$. Sed perinde, ac in Arithmetica vulgari, dicetur in poſterum numerator fractionis quantitas ſupra lineolam exiſtens, & denominator quantitas, quæ infra lineolam exiſtit. Ita in fractione $\frac{ab}{c}$ dicetur numerator quantitas ab, & denominator quantitas c.

Quin etiam, quemadmodum in vulgari Arithmetica quilibet numerus in formâ fractionis exprimi poteſt, ſubſcribendo ei pro denominatore unitatem; ita quoque quælibet quantitas algebraica ad modum fractionis poteſt repræſentari, ſi ei tamquam denominator eadem unitas ſubſcribatur: qua ratione repræſentabitur quantitas ab ad modùm fractionis, ſcribendo $\frac{ab}{1}$; & ſimiliter quantitas $a^2 + c^2$ exhibebitur ad inſtar fractionis, ſi pro ea ſcribatur $\frac{a^2 + c^2}{1}$.

Sed ſi quantitas aliqua integra ad fractio-

ctionem dati nominis reduci debeat, id fiet quoque, ut in Arithmetica vulgari: nimirum multiplicando datam quantitatem per datum nomen, & producto ipſum datum nomen ſubſcribendo: qua ratione, ſi quantitas a reducenda ſit ad fractionem, cujus denominator ſit c, fiet fractio $\frac{ac}{c}$; & ſimiliter, ſi quantitas $m + n$ reducenda ſit ad fractionem, cujus denominator ſit a, fiet fractio $\frac{am + an}{a}$.

Occurrunt quandoque fractiones, quæ ad integras quantitates poſſunt revocari: unde, qua ratione id fieri poſſit, non abs re erit oſtendere. Id itaque fit, dividendo numeratorem fractionis per denominatorem; nam ſi diviſio fieri poſſit, quotiens hujus diviſionis erit quantitas integra quæſita. Ita ſi fractio $\frac{ac}{c}$ ad quantitatem integram ſit reducenda, divido numeratorem ac per denominatorem c; & quia diviſio fieri poteſt, indeque oritur quotiens a, erit a quantitas integra quæſita. Et eâdem ratione erit $m + n$

quantitas integra, ad quam reducitur fractio $\frac{am + an}{a}$.

In calculo fractionum oportet ſæpe ſæpius, duas, pluresve fractiones, quæ diverſos habent denominatores, ad eandem denominationem reducere. Illud itaque obtinebitur, ſi numerator cujuſque fractionis multiplicetur per denominatores aliarum, & cuique producto ſubſcribatur id, quod ex denominatorum omnium multiplicatione producitur: qua ratione fractiones $\frac{a^2}{c}$, & $\frac{m^2}{n}$, reductæ ad eandem denominationem, erunt $\frac{a^2n}{cn}$, & $\frac{m^2c}{cn}$.

Et ſimiliter fractiones $\frac{a^2}{c}$, $\frac{b^2}{m}$, $\frac{d^2}{n}$, ſi ad eandem denominationem reducantur, fient $\frac{a^2mn}{cmn}$, $\frac{b^2cn}{cmn}$, $\frac{d^2cm}{cmn}$.

Ad-

I.

Additio Fractionum.

Additio fractionum duos habet caſus: vel enim fractiones addendæ ſunt ejuſdem denominationis, vel denominationis diverſæ. In primo caſu additio fit, conjungendo ſimul numeratores fractionum, & ſubſcribendo ſummæ communem earum denominatorem. In ſecundo autem caſu primò quidem fractiones propoſitæ reducendæ ſunt ad eandem denominationem, tum addendæ ſunt ſimul, ut in primo caſu.

Hac ratione ſumma fractionum $\frac{bc}{a}$ & $\frac{bd}{a}$ erit $\frac{bc+bd}{a}$. Et ſimiliter ſumma fractionum $\frac{bd}{m}$, & $\frac{ac-ad}{m}$ erit $\frac{bd+ac-ad}{m}$. Sed ſi proponantur in unum addendæ fractiones $\frac{ab}{c}$, & $\frac{bd}{m}$, ſumma erit $\frac{abm+bdc}{cm}$; nam reductæ ad eandem denominationem

Digitized by Google

nem fiunt $\frac{abm}{cm}$, & $\frac{bdc}{cm}$. Pariterque ſi in unum addi debeant fractiones $\frac{a^2}{c}$, & $\frac{b^2-d^2}{m}$, ſumma erit $\frac{a^2m+b^2c-d^2c}{cm}$; quandoquidem ſi eæ ad eandem denominationem reducantur, fient $\frac{a^2m}{cm}$, & $\frac{b^2c-d^2c}{cm}$.

Quod ſi conjungenda ſit quantitas integra cum aliqua fractione; tunc reducenda eſt primùm quantitas illa integra ad fractionem ejuſdem nominis, deinde facienda eſt additio, ut in caſu primo. Ita ſi quantitati integræ a addenda ſit fractio $\frac{b^2}{c}$, reduco quantitatem integram a ad fractionem, cujus denominator ſit c; quumque jam addendæ ſint ſimul fractiones duæ ejuſdem nominis $\frac{ac}{c}$, & $\frac{b^2}{c}$, fiet ſumma $\frac{ac+b^2}{c}$. Similiter, ſi quan-

titati

titati integræ $a + b$ addenda ſit fractio $\frac{d^2}{m}$, erit ſumma $\frac{am + bm + d^2}{m}$.

II.

Subtrctio Fractionum.

Subtractio fractionum duos etiam caſus habet: vel etenim fractiones propoſitæ ſunt ejuſdem denominationis, vel denominationis diverſæ. In primo caſu ſubtractio fit, ſubducendo ex numeratore unius numeratorem alterius, & reſiduo denominatorem communem ſubſcribendo. In ſecundo autem caſu primò quidem fractiones propoſitæ reducendæ ſunt ad eandem denominationem, tum porro facienda ſubtractio, ut in caſu primo.

Hac ratione id, quod remanet, ſubtrahendo ex fractione $\frac{bc}{a}$ fractionem aliam $\frac{bd}{a}$, erit $\frac{bc - bd}{a}$. Et ſimiliter id, quod remanet, ſubtrahendo ex fractione $\frac{bd}{m}$ fractionem aliam $\frac{ac - ad}{m}$, erit

bd

$\frac{bd - ac + ad}{m}$. Sed, ſi ex fractione $\frac{ab}{c}$ ſubtrahi debeat fractio $\frac{bd}{m}$, reſiduum erit $\frac{abm - bdc}{cm}$; nam reductæ ad eandem denominationem fiunt $\frac{abm}{cm}$, & $\frac{bdc}{cm}$. Pariterque, ſi ex fractione $\frac{aa}{c}$ ſubtrahi debeat fractio $\frac{b^2 - d^2}{m}$, reſiduum fiet $\frac{a^2m - b^2c + d^2c}{cm}$; quandoquidem ſi eæ ad eandem denominationem reducantur, fient $\frac{a^2m}{cm}$, & $\frac{b^2c - d^2c}{cm}$.

Quod ſi ex quantitate integra ſubtrahenda ſit fractio aliqua, vel etiam ex fractione aliqua ſubtrahenda ſit quantitas integra; tunc reducenda eſt primùm quantitas illa integra ad fractionem ejuſdē nominis, deinde facienda eſt ſubtractio, ut in caſu primo. Ita, ſi ex quantitate integra a ſubtrahenda ſit fractio $\frac{b^2}{c}$, redu-

co

co quantitatē integram a ad fractionem, cujus denominator ſit c; quumque jam ex fractione $\frac{ac}{c}$ ſubtrahenda ſit fractio $\frac{b^2}{c}$, fiet reſiduum $\frac{ac - b^2}{c}$. Similiter ſi ex fractione $\frac{b^2}{c}$ ſubtrahenda ſit quantitas integra a, reſiduum orietur $\frac{b^2 - ac}{c}$.

III.

Multiplicatio fractionum.

IN multiplicatione fractionum duo ſunt caſus diſtinguendi: aut enim fractio per fractionem, aut fractio per quantitatem integram eſt multiplicanda.

In priori caſu multiplicandi ad invicem ſunt fractionum, tam numeratores, quàm denominatores; nam quæ producuntur, dabunt reſpectivè numeratorem, denominatoremque alterius fractionis, quæ productum quæſitum exhibebit: qua ratione fractio $\frac{ab}{c}$, multiplicata per fractionem $\frac{bd}{m}$, producet $\frac{ab^2d}{cm}$; pariterque fra-

fractio $\frac{ab + ad}{c}$ multiplicata per fractionem $\frac{am}{n}$, dabit pro producto fractionem aliam $\frac{a^2bm + a^2dm}{cn}$.

In ſecundo autem caſu ſcribatur quantitas integra ad inſtar fractionis, ei unitatem ſubſcribendo; & iam quia multiplicandæ ad invicem ſunt duæ fractiones, fiet rurſus multiplicatio, ut in caſu primo. Ita, ſi multiplicanda ſit quantitas integra a per fractionem $\frac{ab}{c}$, ſubſcribo quantitati integræ a unitatem, ut ipſa quoque formam induat fractionis; tum quia multiplicanda eſt fractio $\frac{a}{1}$ per fractionem $\frac{ab}{c}$, fiet productum fractio alia $\frac{a^2b}{c}$.

Unde patet, quod ad multiplicandam quantitatem integram per fractionem aliquam, ſufficiat multiplicare quantitatem integram per numeratorem fractionis, & producto denominatorem ſubſcribe-

bere. Ita ad multiplicandam quantitatem integram a per fractionem $\frac{ab}{c}$, multiplico primum quantitatem integram a per numeratorem fractionis ab, tum producto a^2b ſubſcribo denominatorem c; eritque $\frac{a^2b}{c}$ productum quæſitum. Similiter ſi quantitas integra $a + b$ multiplicari debeat per fractionem $\frac{c^2}{m}$, fiet productum $\frac{ac^2 + bc^2}{m}$; quandoquidem, multiplicata quantitate integra $a + b$ per numeratorem fractionis c^2, & producto $ac^2 + bc^2$ ſubſcripto denominatore m, oritur fractio $\frac{ac^2 + bc^2}{m}$.

IV.

Diviſio fractionum.

In diviſione fractionum tres oportet caſus diſtinguamus. Primus erit, quum dividenda eſt fractio per fractionem.

nem. Secundus, quum quantitas integra per fractionem dividenda proponitur. Et tertius, quum viciſſim fractio per quantitatem integram dividi debet.

In primo caſu, in quo dividenda eſt fractio per fractionem, multiplicetur numerator illius per denominatorem iſtius, & viciſſim numerator iſtius per denominatorem illius; nam producta dabunt reſpectivè numeratorem, denominatoremque alterius fractionis, quæ quotientem quæſitum exhibebit. Ità ſi dividenda ſit fractio $\frac{ab}{n}$ per fractionem $\frac{cd}{m}$, multiplico primùm numeratorem illius ab per denominatorem iſtius m; deinde multiplico viciſſim numeratorem iſtius cd per denominarorem illius n; denique producto, ex priori multiplicatione orto, abm ſubſcribo productum cdn, ortum ex multiplicatione ſecunda; eritque fractio $\frac{abm}{cdn}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

In ſecundo caſu, in quo quantitas integra per fractionem eſt dividenda, ſcribatur quantitas integra ad inſtar fractionis, ei unitatem ſubſcribendo; & jam quia

quia dividenda eſt fractio per fractionem, fiet rurſus diviſio, ut in caſu primo. Ita, ſi dividenda ſit quantitas integra a^2 per fractionem $\frac{mn}{c}$, ſubſcribo quantitati integræ a^2 unitatem, ut ipſa quoque induat formam fractionis; tum quia dividenda eſt fractio $\frac{a^2}{1}$ per fractionem $\frac{mn}{c}$; fiet quotiens diviſionis $\frac{a^2c}{mn}$.

Ex quo patet, ad dividendam quantitatem integram per fractionem ſufficere, ſi multiplicetur quantitas integra per denominatorem fractionis, & producto numerator ſubſcribatur. Ita, ad dividendam quantitatem integram a^2 per fractionem $\frac{mn}{c}$, multiplico primùm quantitatem integram a^2 per denominatorem fractionis c; deinde producto a^2c ſubſcribo numeratorem mn, eritque fractio $\frac{a^2c}{mn}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

Denique in tertio caſu, in quo viciſ-

ſim dividenda eſt fractio per quantitatem integram, ſcribatur ſimiliter quantitas integra ad inſtar fractionis, ei unitatem ſubſcribendo; quumque jam dividenda ſit fractio per fractionem, fiet adhuc diviſio, ut in caſu primo. Ita, ſi dividenda ſit fractio $\frac{a^2b}{c}$ per quantitatem integram m, ſubſcribo quantitati integræ m unitatem, ut ipſa quoque fractionis induat formam; tum quia dividenda eſt fractio $\frac{a^2b}{c}$ per fractionem $\frac{m}{1}$, fiet quotiens propoſitæ diviſionis fractio alia $\frac{a^2b}{cm}$.

Unde patet, quod ad dividendam fractionem per quantitatem integram ſufficiat, ſi multiplicetur denominator fractionis per ipſam quantitatem integram, & productum numeratori ſubſcribatur. Ita, ſi fractio $\frac{a^2b}{c}$ dividenda ſit per quantitatem integram m, multiplico primum denominatorem fractionis c per quantitatem integram m, deinde productum

cm

cm ſubſcribo numeratori a^2b ; eritque fractio $\frac{a^2b}{cm}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

V.

Reductio fractionum ad minimos terminos.

IN calculo fractionum accidit nonnunquam, ut fractio aliqua quantitatibus adeò compoſitis exprimatur, ut commodè, non mutato ejus valore, quantitatibus ſimplicioribus exprimi poſſit; unde priuſquam ex calculo fractionum ad ulteriora progrediamur, ad rem erit, hîc breviter oſtendere, quo pacto fractiones ad minimos terminos ſint reducendæ. Hunc in finem tradenda priùs eſt methodus, qua inveniri poſſit maxima communis menſura duarum quantitatum: qua in re duos caſus oportet diſtinguamus.

Nam primò, ſi utraque quantitatum, vel una ad minimum ſit ſimplex, capiantur litteræ, quæ ſingulis ſunt communes, & productum ex iis erit maxima communis menſura quæſita. Ita, ſi quantitates propoſitæ ſint *abcd*, & *acm*; erit *ac*

maxima earum communis menſura. Similiter, ſi quantitates propoſitæ ſint $abcd$, & $abd + abm$; erit illarum maxima communis menſura ab. Atque ita quoque erit am maxima menſura communis quantitatum abm, & $acm + adm$.

Quod ſi utraque quantitatum ſit compoſita; auferantur primò litteræ ſingulis utriuſque partibus communes; deinde ſubducantur quoque litteræ, quæ in ſingulis cujuſque partibus reperiuntur; denique dividatur major per minorem: & ſiquidem diviſio fiat exactè, erit ipſa quantitas minor, per litteras ſingulis utriuſque partibus communes multiplicata, maxima communis menſura.

Hoc pacto, ſi invenienda ſit maxima communis menſura duarum quantitatum $ab^2c - ad^2c$, & $abm - adm$; aufero primùm litteram a, quæ in ſingulis partibus utriuſque quantitatis exiſtit, earumque una fiet $b^2c - d^2c$, altera $bm - dm$. Deinde ex illa deleo quantitatem c, ſingulis ejus partibus communem; ex iſta aufero quantitatem m, quæ in ſingulis ipſius partibus reperitur: unde illa evadet $b^2 - d^2$, hæc fiet $b - d$. Denique divido $b^2 - d^2$ per $b - d$; & quia diviſio fit exactè, erit maxima menſura

com-

communis quantitas $ab - ad$, quæ producitur, multiplicando $b - d$ per a.

Sed ſi diviſâ majori per minorem, diviſio non fiat exactè; auferantur ex reſiduo litteræ, in ſingulis ejus partibus exiſtentes, & minor per hoc reſiduum dividatur. Nam, ſi hæc altera diviſio prodibit exacta, erit reſiduum illud, per litteras ſingulis utriuſque partibus communes multiplicatum, maxima communis menſura. Sed ſi neque etiam hæc altera diviſio exactè fieri poſſit; auferantur rurſus ex reſiduo alterius hujus diviſionis litteræ, quæ in ſingulis ejus partibus exiſtunt; & diviſo reſiduo primo per ſecundum, continuetur hæc operatio, uſque donec nihil in diviſione remaneat.

Hac ratione, ſi invenienda ſit maxima communis menſura quantitatum $m^4 + 2am^3 + a^2m^2 + abm^2 + a^2bm$, & $cm^3 + 2acm^2 + a^2cm$; aufero primùm litteram m, quæ in ſingulis utriuſque partibus exiſtit, & fiet una $m^3 + 2am^2 + a^2m + abm + a^2b$, altera $cm^2 + 2acm + a^2c$. Deinde, quia in partibus primæ nihil exiſtit commune, nihil ex iis detrahi debet; ſed ex partibus ſecundæ detraho litteram c, quæ in omnibus reperitur: unde fiet $m^2 + 2am + a^2$. Divido porro primam $m^3 +$

$2am^2 + a^2m + abm + a^2b$ per ſecundam $m^2 + 2am + a^2$, & quia diviſio fieri nequit exactè, ſed remanet $+ abm + a^2b$, aufero ex hoc reſiduo litteras a, & b, quæ in ambabus ejus partibus exiſtunt, ut fiat $m + a$. Tum divido ſecundam $m^2 + 2am + a^2$ per hoc reſiduum $m + a$; quumque diviſio prodeat exacta, erit maxima communis menſura quantitas $m^2 + am$, quæ producitur, multiplicando $m + a$ per litteram m, quæ in ſingulis utriuſque quantitatis propoſitæ partibus exiſtebat.

Jam tradita methodo inveniendi maximam communem menſuram duarum quantitatum; haud difficile modò erit fractiones ad minimos terminos reducere, quotieſcumque id fieri poteſt. Inveniatur namque maxima communis menſura numeratoris, & denominatoris propoſitæ fractionis, per quam tam ille, quàm iſte dividatur; & quoniam utraque diviſio perficitur exactè, erunt quotientes reſpectivè numerator, & denominator novæ fractionis: qua ratione fractio $\frac{abcd}{acm}$ mutabitur in hanc aliam $\frac{bd}{m}$, ſi reducenda fit

fit illa ad minimos terminos quandoquidem numeratoris $abcd$, & denominatoris acm maxima communis menſura eſt ac. Et ſimiliter fractio $\frac{ab^2c - ad^2c}{abm - adm}$, ſi reducatur ad minimos terminos, erit $\frac{bc + dc}{m}$; ſiquidem numeratoris $ab^2c -$ ad^2c, denominatoriſque $abm - adm$ maxima communis menſura, juxta regulam ſuperiùs traditam, eſt $ab - ad$.

CAP. IV.

Formatio poteſtatum.

Quantitatis proprietates omnes reſpiciunt, vel incrementum ejus, vel ejuſdem decrementum: unde quatuor circa eam inſtituuntur operationes, additio, ſubtractio, multiplicatio, & diviſio. Augeri etenim quantitas aliqua poteſt, vel ei aliam addendo, vel eandem accipiendo toties, quot ſunt partes in altera. Et eadem ratione pòteſt aliqua quantitas minui, vel ex ea aliam ſubducendo

ſemel, vel toties, quoties hæc altera in illa continetur. Jam, quo pacto quatuor iſtæ operationes inſtituantur, tam in quantitatibus ſimplicibus, & compoſitis, quàm in fractionibus, ſive quantitatibus fractis; hactenus explicuimus. Sed quoniam ex multiplicatione duarum, aut plurium quantitatum æqualium oriuntur producta quædam, quæ poteſtatum nomine ſolent inſigniri; ſequitur proinde, ut poteſtatum harum compoſitionem, & reſolutionem tantiſper contemplemur.

I.

Definitio, ordo, ac geneſis poteſtatum.

POteſtatem itaque vocamus id, quod evadit quantitas aliqua, quum ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur; & dicimus indicem, ſive exponentem poteſtatis numerum illum, qui quantitati à tergo adſcriptus deſignat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet. Ita quantitas a^2, quæ producitur, multiplicando a ſemel in ſe ipſam, vocabitur poteſtas ipſius a; ejuſque index, ſive exponens dicetur numerus 2. Et ſimiliter quantitas a^3, quæ producitur, mul-

multiplicando a bis in ſe ipſam, vocabitur poteſtas ejuſdem a; ſed ejus index, ſive exponens erit numerus 3.

Ratione hujus indicis, ſivè exponentis variæ diſtingui poſſunt poteſtates. Dicemus ſiquidem poteſtatem primam, cujus index eſt unitas; vocabimus poteſtatem ſecundam, cujus index eſt binarius; atque ità quoque poteſtas tertia erit illa, cujus index eſt ternarius; poteſtas quarta, quæ habet quaternarium pro ſuo indice; & ſic deinceps in infinitum: qua ratione a, ſive a^1 erit prima poteſtas ipſius a; aa, ſive a^2 erit poteſtas ſecunda; a^3 poteſtas tertia; a^4 poteſtas quarta; atque ita deinceps.

Veteres has poteſtates propriis ſuis nominibus decorarunt. Dixerunt etenim primò radicem, ſive latus primam poteſtatem; hoc eſt ipſam illam quantitatem, quæ per multiplicationem repetita, ad ſuperiores evehitur poteſtates. Deinde verò vocarunt ejus lateris quadratum, poteſtatem ſecundam; cubum, poteſtatem tertiam; quadrato-quadratum, poteſtatem quartam; quadrato-cubum, poteſtatem quintam; cubo-cubum, poteſtatem ſextam; atque ita deinceps. Sed quoniam per hæc nomina non adeò clara nobis

ſubo-

Digitized by Google

ſuboritur poteſtatum harum idea ; ſatiùs erit, eas ſecundùm indices ipſarum modo jam dicto à ſe mutuò diſtinguere.

Jam, quod ſpectat ad geneſim harum poteſtatum ; ex iis, quæ modò dicta ſunt, facilè quidem ea colligi poteſt. Nam ſi nulla fiat quantitatis in ſe ipſam multiplicatio, ſed ipſa quantitas accipiatur, habebitur poteſtas prima ; ſi verò quantitas ſemel in ſe ipſam multiplicetur, habebitur poteſtas ſecunda; ſi bis, tertia; ſi ter, quarta ; atque ita deinceps : quocirca, ut quantitas aliqua ad poteſtatem dati nominis elevetur, ſatis erit toties eam per ſe ipſam multiplicare, quot habet unitates datum nomen, unâ demptâ.

Hinc, quum multiplicatio in quantitatibus ſimplicibus nullam difficultatem involvat, facile erit ad quamcumque poteſtatem eas elevare. Ita quadratum, ſive ſecunda poteſtas quantitatis ab eſt a^2b^2 ; quandoquidem ſi quantitas ab ſemel per ſeipſam multiplicetur, orietur quantitas a^2b^2. Pariterque cubus quantitatis ac erit a^3c^3 ; quandoquidem ſi quantitas ac bis per ſe ipſam multiplicetur, orietur quantitas a^3c^3. Sed quoniam reiterata in quantitatibus compoſitis multiplicatio nonnihil difficultatis tyronibus faceſſit; aliam

aliam proinde placet hîc methodum proponere, pro elevandis quantitatibus compoſitis ad datam quamcumque poteſtatem: quam quidem eo lubentiùs afferam, quia exinde earundem poteſtatum reſolutio nullo negotio deducitur. Oritur namque ea methodus ex ipſa earum poteſtatum compoſitione: qua proinde cognita facile & ipſa reſolutio innoteſcet.

II.

Elevatio quantitatum ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem.

UT igitur quælibet quantitas compoſita ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem multò faciliùs elevetur, quàm eam per ſe ipſam multiplicando ſemel; ſciendum eſt priùs quadratum alicujus quantitatis, quæ duabus ex partibus coaleſcit, componi ex quadratis partium, & duplo ejus, quod fit ex mutua earum partium multiplicatione: id, quod ipſius multiplicationis ope quis poterit experiri; nam, multiplicando $a + b$ per $a + b$, producitur $a^2 + 2ab + b^2$: quod productum, ut vides, continet quadrata partium a, & b; duplumque ejus, quod pro-

producitur, multiplicando *a* per *b*.

Hoc poſito theoremate, quod geometricè oſtenditur ab Euclide propoſitione quarta libri ſecundi Elementorum; facilè modò erit quamcumque compoſitam quantitatem ad quadratum elevare. Nam primò, ſi quantitas illa compoſita duabus tantùm partibus conſtet; ſumenda ſunt quadrata earum partium; duplumque ejus, quod producitur ex mutua earum partium multiplicatione. Quod ſi verò quantitas propoſita tribus ex partibus conſtet; conſiderentur priores duæ tamquam una, & ſimiliter ſumatur quadratum tàm hujus, quàm partis alterius, unà cum duplo ejus, quod producitur, multiplicando priores duas, velut unam conſideratas, in partem tertiam. Nec aliter fieri debet, ſi quantitas oblata conſtet ex quatuor partibus; nam conſideratis ut una prioribus tribus, ſumenda ſunt quadrata iſtius, & partis quartæ; quemadmodum & duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione primarum trium in quartam.

Ita, ſi quantitas compoſita, ad quadratum elevanda, ſit $a + b$; fiet quadratum $a^2 + 2ab + b^2$. Sed ſi ad quadratum elevanda ſit quantitas $a + b + c$; fiat primò

qua-

quadratum ex duabus prioribus partibus, velut una conſideratis, $a + b$: id quod erit $a^2 + 2ab + b^2$; deinde ſumatur duplum ejus, quod producitur, multiplicando eaſdem priores partes $a + b$ per partem tertiam c: id quod erit $2ac + 2bc$; denique fiat quadratum c^2 ex parte tertia c : atque hac ratione additis in unum omnibus iſtis quantitatibus, fiet quadratum quantitatis propoſitæ $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$.

Quod ſi ad quadratum ſit elevanda quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus conſtat; fiat primò quadratum ex primis tribus, tamquam unica conſideratis, $a + b + c$: quod erit $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$; tum ſumatur duplum ejus, quod oritur ex multiplicatione earundem partium $a + b + c$ in partem quartam d : nimirum $2ad + 2bd + 2cd$; denique fiat quadratum d^2 ex parte quarta d : & additis in unum omnibus iſtis quantitatibus, erit quadratum quantitatis propoſitæ $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$.

Quoniam autem fieri poteſt, ut partes propoſitæ quantitatis ſigno — afficiantur; notetur proinde velim quadrata ipſarum partium ſemper quidem affi-

cien-

cienda eſſe ſigno +, quomodocumque partes illæ ſint affectæ; at verò producta alia tunc quidem affici debere ſigno +, quum ambæ partes, ex quarum multiplicatione oriuntur, eodem ſigno ſunt affectæ. Ita quadratum ex $a - b$ erit $a^2 - 2ab + a^2$; & quadratum ex $a - b - c$ erit $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2$; & quadratum ex $a - b - c + d$ erit $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac + 2bc + c^2 + 2ad - 2bd - 2cd + d^2$: id, quod ex ipſo opere multiplicationis, ſuperiùs tradito, facili negotio colligere quis poterit.

Hinc illud inferre licet, quod ſi numero quadrato a^2 addatur duplum ſuæ radicis $2a$, unà cum unitate; ſumma $a^2 + 2a + 1$ ſit etiam numerus quadratus, cujus radix unitate una ſuperat radicem illius; quandoquidem, ſi fiat quadratum ex $a + 1$, erit illud juxta regulam traditam $a^2 + 2a + 1$. Unde modò facilè erit tabulas componere, quæ contineant quadrata omnia numerorum naturalium. Nam quadratum unitatis eſt etiam 1; cui ſi addatur duplum ſuæ radicis, hoc eſt 2, unà cum ipſa unitate, fiet 4 quadratum binarii; atque huic porro addito duplo ipſius binarii, hoc eſt 4, unà cum unitate, habebitur 9 pro quadrato ternarii; ſicque

ſo-

ſolius additionis ope aliorum omnium numerorum naturalium quadrata ſucceſſivè invenientur.

III.

Elevatio quantitatum ad cubum, ſive tertiam poteſtatem.

Similiter, ut quælibet quantitas compoſita ad cubum, ſive tertiam poteſtatem multò faciliùs elevetur, quàm eam bis per ſe ipſam multiplicando; ſciendum eſt priùs, cubum alicujus quantitatis, quæ duabus ex partibus coaleſcit, componi ex cubis partium; ex triplo ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ partis in alteram; & ex triplo ejus, quod naſcitur, multiplicando quadratum ſecundæ partis in primam: id, quod ipſius multiplicationis ope poteſt oſtendi: etenim ſi $a + b$ bis in ſe ipſam multiplicetur, producitur $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$: quod productum, ut vides, continet cubos partium a, & b; triplum ejus, quod producitur, multiplicando a^2 per b; triplumque ejus, quod oritur, multiplicando b^2 per a.

Hoc poſito theoremate, quod ad inſtar ejus,

ejus, quod continetur in propoſitione quarta libri ſecundi Elementorum, geometricè poſſet oſtendi; haud difficile modò erit, quamcumque compoſitam quantitatem ad cubum, ſive tertiam poteſtatem elevare. Nam primò ſi quantitas duabus ex partibus conſtet; ſumantur oportet cubi earum partium; triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per ſecundam; triplumque ejus, quod producitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam. At verò ſi propoſitæ quantitatis tres fuerint partes; conſiderentur duæ priores tamquam una, & ſimiliter factis cubis iſtius, & partis tertiæ, ſumatur porro tam triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ex primis duabus in partem tertiam, quàm triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum partis tertiæ in priores duas: neque aliter fiet, ſi quantitas compoſita ex quatuor, aut multò pluribus partibus conſtet.

Ita, ſi quantitas compoſita, ad cubum, ſive tertiam poteſtatem elevanda, ſit $a + b$; erit cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. Sed ſi ad cubum oporteat elevare quantitatem $a + b + c$, quæ tribus ex partibus conſtat; fiat primò cubus ex duabus pri-

mis

mis partibus $a + b$, qui erit $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; tum ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicãdo $a^2 + 2ab + b^2$, quadratum duarum primarum partium $a + b$, in partem tertiam c: nimirum $3a^2c + 6abc + 3b^2c$; porro accipiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando c^2, quadratum partis tertiæ c, in duas priores $a + b$: ſcilicet $3ac^2 + 3bc^2$; & denique fiat cubus c^3 ex parte tertia c: qua ratione, additis in unum omnibus iſtis quantitatibus, fiet cubus quantitatis propoſitæ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$.

Quod ſi ad cubum elevanda ſit quantitas $a + b + c + d$, quæ quatuor ex partibus conſtat; fiat primò ex primis tribus, tamquam unica conſideratis, $a + b + c$ cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3$; tum ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando $a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2$, quadratum trium primarum partium $a + b + c$, in partem quartam d: nimirum $3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d$; porro capiatur triplum ejus, quod gignitur, multiplicando d^2, quadratum quartæ partis d, in tres priores $a + b + c$: ſcilicet $3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2$; & deni-

que fiat cubus d^3 ex parte quarta d: nam additis in unum omnibus iſtis quantitatibus, fiet cubus quantitatis propoſitæ $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3a^2c + 6abc + 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 + c^3 + 3a^2d + 6abd + 3b^2d + 6acd + 6bcd + 3c^2d + 3ad^2 + 3bd^2 + 3cd^2 + d^3$.

Quoniam autem fieri poteſt, ut partes propoſitæ quantitatis ſigno — afficiantur; proinde notetur velim, cubos ipſarum partium afficiendos eſſe ſemper eodem ſigno, quo ipſæ partes afficiuntur; producta verò illa, quæ oriuntur, multiplicando quadratum unius partis in aliā, tunc demum afficienda eſſe ſigno —, quum hæc alia pars ſigno — afficitur; & denique producta illa, quæ ex trium partium multiplicatione oriuntur, afficienda eſſe ſigno — tunc tantùm, quum earum partium vel unaquæque, vel una tantummodò afficitur ſigno —: qua ratione cubus ex $a - b - c$ erit $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 3a^2c + 6abc - 3b^2c + 3ac^2 - 3bc^2 - c^3$: id, quod ex ipſo multiplicationis opere abundè colligitur.

Jam ex dictis illud modò fit manifeſtum, quod ſi alicui numero cubo a^3 addatur primo triplum quadrati ſuæ radicis

cis $3a^2$, deinde triplum ipſius radicis $3a$, ac denique unitas; ſumma $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$ ſit etiam uumerus cubus, cujus radix untiate unâ ſuperat radicem illius; quandoquidem ſi fiat cubus ex $a + 1$, erit ille juxta regulam traditam $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$: unde modò facile erit, tabulas conſtruere, quæ contineant cubos omnes numerorum naturalium: nam cubus unitatis eſt etiam 1, cui ſi addatur triplum quadrati ſuæ radicis 3, itemque triplum ipſius radicis, quod eſt ſimiliter 3, ac denique unitas, fiet 8 cubus binarii: atque huic porro addito quadrato ſuæ radicis triplicato 12, itemque triplo ipſius radicis 6, ac denique unitate, fiet 27 cubus ternarii: neque aliter aliorum omnium numerorum naturalium cubi poterunt ſucceſſivè inveniri.

IV.

Elevatio quantitatum ad poteſtates ſuperiores.

NOn diſſimili methodo poterunt quantitates compoſitæ ad quamcumque aliam poteſtatem altiorem elevari; nam ſatis erit ope ipſius multipli-

cationis ſemel invenire, ex quibus partibus componatur poteſtas propoſita alicujus quantitatis, cujus duæ ſint partes; & eas ſemper partes aſſumere, quotieſcumque aliqua quantitas ad illam poteſtatem ſit elevanda: conſiderando primas omnes tamquam unam, quotieſcumque quantitas propoſita ex pluribus, quàm duabus partibus, conſtat.

Hac ratione, ſi quantitas aliqua ad quadrato-quadratum, ſive quartam poteſtatem ſit elevanda; conſidero priùs quadrato-quadratum ex quantitate compoſita $a + b$, quæ duabus partibus conſtat, eſſe $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; atque adeò componi ex quadrato-quadratis ipſarum partiū; ex quadruplo ejus, quod producitur, multiplicando cubum primæ per ſecundam; ex quadruplo ejus, quod oritur, multiplicando cubum ſecundæ per primam; ac denique ex ſextuplo ejus, quod naſcitur, multiplicando quadratum primæ per quadratum ſecundæ: proindeque hujus theorematis ope facile erit, quamcumque compoſitam quantitatem ad quadrato-quadratum elevare.

Eadem ratione, ſi quantitas aliqua ad quadrato-cubum, ſive quintam poteſtatem ſit elevanda; conſiderare priùs oportet

tet, quadrato-cubum ex quantitate $a + b$, cujus duæ ſunt partes, eſſe $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; atque adeò componi ex quadrato-cubis ipſarum partium; ex quintuplo ejus, quod oritur, multiplicando quadrato-quadratum primæ in ſecundam, ex quintuplo ejus, quod fit, multiplicando quadrato-quadratum ſecundæ in primam; ex decuplo ejus, quod naſcitur, multiplicando cubum primæ in quadratum ſecundæ; ac denique ex decuplo ejus, quod producitur, multiplicando cubum ſecundæ in quadratum primæ: quo quidem invento theoremate, facili negotio quælibet quantitas compoſita ad quadrato-cubum elevabitur.

Jam his inventis theorematibus, poterunt & alia ipſis correſpondentia inveniri, quibus facili negotio conſtrui poſſent tabulæ, quæ numerorum omnium naturalium quadrato-quadrata, quadrato-cubos &c. cōtinerent. Sic ex theoremate, quadrato-quadrati compoſitionem oſtendente, manifeſtum eſt, quod ſi alicui numero quadrato-quadrato a^4 addatur primò quadruplum cubi ſuæ radicis $4a^3$, deinde ſextuplum quadrati ejuſdem radicis $6a^2$, porro quadruplum ipſius radicis $4a$,

ac denique unitas; ſumma omnium $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$ ſit etiam numerus quadrato-quadratus, cujus radix ſuperat unitate unâ radicem illius; quandoquidem ſi fiat quadrato-quadratum ex $a + 1$, erit illud juxta theorema ſuperiùs inventum $a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$: quare huic inſiſtendo theoremati, facile erit numerorum omnium naturalium quadrato-quadrata ſucceſſivè invenire.

Similiter ex theoremate, quadrato-cubi compoſitionem oſtendente, perſpicuum eſt, quod ſi alicui numero quadrato-cubo a^5 addatur primò quintuplum quadrato-quadrati ſuæ radicis $5a^4$, ſecundò decuplum cubi ejuſdem radicis $10a^3$, tertiò decuplum quadrati ejuſdem adhuc radicis $10a^2$, quartò ipſamet radix quintuplicata $5a$, & denique unitas; quod inquam ſumma omnium $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$ ſit etiam numerus quadrato-cubus, cujus radix unitate unâ ſuperat radicem illius; quandoquidem ſi fiat quadrato-cubus ex $a + 1$, erit ille juxta theorema ſuperiùs inventum $a^5 + 5a^4 + 10a^3 + 10a^2 + 5a + 1$: unde hujus canonis beneficio in proclive erit, numerorum omnium naturalium quadrato-cubos ſucceſſivè invenire.

CA-

CAP. V.

Extractio radicum.

Quemadmodum quum quantitas aliqua ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur, id quod producitur, vocatur poteſtas illius quantitatis; ità quoque ipſa illa quantitas, ex cujus reiterata multiplicatione poteſtas producitur, vocatur radix illius poteſtatis. Et rurſus, quemadmodum poteſtates diſtinguuntur in ordines ſecundùm indices, ſive exponentes ipſarum; ita quoque radices earundem poteſtatum, habitâ illorum exponentium ratione, poſſunt in varios ordines diſtingui.

Nimirum, ſicuti poteſtas prima eſt illa, cujus index eſt unitas; poteſtas ſecunda, ſive quadratum, cujus index eſt numerus binarius; poteſtas tertia, ſive cubus, cujus index eſt numerus ternarius; atque ita deinceps. Ita quoque dici poteſt radix prima, quæ refertur ad poteſtatẽ primam; radix ſecunda, ſive quadrata, quæ refertur ad quadratum, ſive poteſtatem ſecundam; radix tertia, ſive cubica, quæ refertur ad cubum, ſive poteſtatem tertiam; atque ita deinceps.

Digitized by Google

Jam radices extrahere ex poteſtatibus quantitatum ſimplicium, Problema eſt, quod nullam difficultatem involvit. Nam, quemadmodum quantitas *ab*, multiplicata ſemel per ſe ipſam, producit quadratum a^2b^2; ſic & radice quadratâ extracta ex a^2b^2, proveniet rurſus ipſa quantitas *ab*. Et inſuper, quemadmodum quantitas *ab*, bis per ſe ipſam multiplicata, producit cubum a^3b^3; ita quoque extractâ radice cubicâ ex a^3b^3, orietur rurſus eadem quantitas *ab*. Verumtamen quum poteſtates plures terminos involvunt, atque adeò ad quantitates compoſitas referuntur, radicum extractio non ita facilis deprehenditur: quocirca, ut methodum eas extrahendi addiſcant tyrones, primò illam experiemur in extractione radicis quadratæ, deinde in extractione radicis cubicæ, ac denique quo pacto extractioni aliarum radicum debeat applicari, breviter oſtendemus.

I.

Extractio radicis quadratæ.

UT ex quantitate quantumlibet compoſita quadrata radix extrahatur,

tur, conſideremus oportet radicem illius quantitatis duabus ex partibus conſtare; atque adeò in poteſtate illa contineri quadrata earum partium, itemque duplum ejus, quod producitur ex mutua earum partium multiplicatione. Hinc enim methodus eam extrahendi talis erit.

Nempe primò ex termino aliquo, qui ſit quadratus perfectus, eliciatur quadrata radix; ſecundò per duplum hujus radicis dividantur termini omnes, in quibus eadem radix includitur; tertiò eidem radici addatur inventus quotiens ſuis propriis ſignis; & quartò demum fiat ex tota ſumma quadratum, quod ſubducatur ex quantitate propoſita. Nam ſi hac facta ſubductione contigerit nihil relinqui, indicio erit, quantitatem propoſitam eſſe quadratum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam; ſecus verò ſi ex ea ſubtractione aliquid ſupererit: ſiquidem argumento erit, quantitatem propoſitam non eſſe quadratum perfectum, ſed ſubducendum eſſe ex ea reſiduum illud, quò quadratum evadat.

Hac ratione, ſi quæratur quadrata radix quantitasis $a^2 + 2ab + b^2$, extraho primùm radicem ex a^2 quadrato, per cujus

jus duplum $2a$ divido deinde terminum $+ 2ab$, in quo illa reperitur; tum quia quotiens inventus $+ b$, additus eidem radici a, dat pro ſumma $a + b$, cujus quadratum $a^2 + 2ab + b^2$, ſubductum ex quantitate propoſita, relinquit nihil; concludo quantitatem propoſitam eſſe quadratum perfectum, ejuſque radicem eſſe $a + b$.

Eâdem ratione, ſi proponatur invenienda quadrata radix hujus quantitatis $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$; extraho primùm radicem ex quadrato a^2; deinde per duplum ejus $2a$ divido terminos $+ 2ab - 2ac$, in quibus includitur radix illa; & quia quotiens hujus diviſionis $+ b - c$, additus radici a, dat pro ſumma $a + b - c$, cujus quadratum $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$, ſubductum ex quantitate propoſita, dat nihil pro reſiduo; concludendum eſt, quantitatem propoſitam quadratum eſſe perfectum, ejuſque radicem eſſe $a + b - c$.

Qnod ſi autem extrahenda proponatur quadrata radix ex $a^2 + 2ab + b^2 - 2ac$, elicio ſimiliter radicem ex quadrato a^2, per cujus duplum $2a$ divido quoque terminos $+ 2ab - 2ac$, in quibua illa reperitur. Sed quoniam quotiens hujus divi-

viſionis $+ b - c$ additus radici a dat pro ſumma $a + b - c$, cujus quadratum, ſubtractum ex quantitate propoſita, dat pro reſiduo $+ 2bc - c^2$; concludo quantitatem illam non eſſe quadratum perfectum, ſed fieri talem, ſi ex ea ſubducatur reſiduum iſtud $+ 2bc - c^2$.

II.

Extractio radicis cubicæ.

Similiter, ut ex quantitate quantumlibet compoſita radix cubica eliciatur, conſiderare oportet radicem illius quantitatis, velut compoſitam ex duabus partibus; atque adeò quantitatem ipſam continere cubos earum partium; triplum ejus, quodoritur, multiplicando quadratum primæ per ſecundam; triplumque ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam. Hinc enim methodus radicem illam eruendi talis erit.

Nempe primò ex termino aliquo, qui ſit cubus perfectus, eliciatur radix cubica; ſecundò per triplum quadrati hujus radicis dividantur termini omnes, in quibus quadratum illud reperitur; tertiò quo-

quotiens inventus propriis ſuis ſignis adjungatur eidem radici; ac denique fiat cubus ex tota ſumma, qui ſubducatur ex quantitate propoſita. Nam ſi hac facta ſubductione nihil relinquetur, indicio erit quantitatem propoſitam eſſe cubum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam; ſecus verò, ſi ex ea ſubductione aliquid ſupererit; quandoquidem argumento erit, quantitatem propoſitam non eſſe cubum perfectum, ſed talem evadere, ſi ex ea reſiduum illud ſubducatur.

Hoc pacto, ſi quæratur radix cubica quantitatis hujus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; extraho primùm radicem ex cubo a^3, per cujus quadrati triplum $3a^2$ divido deinde terminum $3a^2b$, in quo quadratum illud reperitur; tum quia quotiens inventus $+ b$ additus radici a, dat pro ſumma $a + b$, cujus cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, ſubductus ex quantitate propoſita, relinquit nihil; concludo quantitatem propoſitam eſſe cubum perfectum, ejuſque radicem eſſe $a + b$.

Similiter, ſi proponatur invenienda radix cubica hujus quantitatis $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$; extraho primum radi-

dicem cubicam ex cubo a^3, deinde per triplum ſui quadrati $3a^2$ divido terminos $+ 3a^2b - 3a^2c$, in quibus quadratum illud continetur; & quoniam quotiens hujus diviſionis $+ b - c$ additus radici a dat pro ſumma $a + b - c$, cujus cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$, ſubductus ex quantitate propoſita, dat nihil pro reſiduo; concludendum eſt, quantitatem propoſitam eſſe cubum perfectum, ejuſque radicem eſſe $a + b - c$.

Verumtamen ſi extrahenda proponatur radix cubica ex quantitate $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c + 3ac^2$; elicio ſimiliter radicem ex cubo a^3, per cujus quadrati triplum $3a^2$ divido quoque terminos $+ 3a^2b - 3a^2c$, in quibus quadratum illud reperitur. Sed quoniam quotiens hujus diviſionis $+ b - c$, additus radici a, dat pro ſumma $a + b - c$, cujus cubus $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 - 3a^2c - 6abc - 3b^2c + 3ac^2 + 3bc^2 - c^3$, ſubtractus ex quantitate propoſita, dat pro reſiduo $+ 6abc + 3b^2c - 3bc^2 + c^3$, concludo quantitatem illam non eſſe cubum perfectum, ſed talem fieri, ſi reſiduum iſtud ex ea ſubducatur.

Ex-

Digitized by Google

III.

Extractio aliarum radicum.

Quod ad aliarum radicum attinet extractionem, methodus generalis hæc eſt. Primò ex termino aliquo, qui eam contineat poteſtatem, de qua agitur, eliciatur quæſita radix. Secundò radix iſta elevetur ad poteſtatem, quæ ſit una dimenſione minor poteſtate illa, ad quam prius erat evecta. Tertiò ſumatur toties iſta poteſtas, quot ſunt unitates in indice illius, ad quam ſua radix erat priùs elevata. Quartò per hunc ejus poteſtatis indicem dividantur omnes illi termini, in quibus eadem illa poteſtas reperitur. Quintò quotiens hujus diviſionis addatur propriis ſuis ſignis inventæ radici. Et ſextò demum fiat ex tota ſumma poteſtas, de qua agitur, eademque ſubducatur ex quantitate propoſita. Nam, ſi hac facta ſubtractione nihil remaneat, erit quantitas propoſita poteſtas perfecta, ejuſque radix erit ſumma inventa; ſecus verò ſi aliquid ſuperſit: quandoquidem id indicabit, quantitatem propoſitam non eſſe perfectam poteſtatem, ſed talem evade-

re,

Digitized by Google

re, ſi ex ea reſiduum illud ſubducatur.

Hac ratione, ſi extrahenda ſit radix quarta, ſive quadrato-quadrata ex quantitate $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; extraho primùm radicem ex quadrato-quadrato a^4, deinde per quadruplum ſui cubi $4a^3$ divido terminum $4a^3b$, in quo cubus ille reperitur; & quoniam quotiens hujus diviſionis $+b$, additus radici a, dat pro ſumma quantitatem $a+b$, cujus quadrato-quadratum $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, ſubductum ex quantitate propoſita, relinquit zero, ſive nihil; concludo quantitatem illam eſſe quadrato-quadratum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam $a+b$.

Sed ſi radix quarta, ſive quadrato-quadrata extrahenda ſit ex quantitate $a^4 - 4a^3b - 4ab^3 + b^4$, elicio ſimiliter radicem ex quadrato-quadrato a^4, per cujus cubi quadruplum $4a^3$ divido quoque terminum $-4a^3b$, in quo cubus ille reperitur. Verumtamen, quia ex hac diviſione oritur quotiens $-b$, qui additus radici a dat pro ſumma $a-b$, cujus quadrato-quadratum $a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$, ſubtractum ex quantitate propoſita, dat pro reſiduo $-6a^2b^2$; conclu-

cludendum eſt, quantitatem illam non eſſe perfectum quadrato-quadratum; ſed fieri talem, ſi reſiduum iſtud ex ea ſubtrahatur.

Eâdem ratione, ſi extrahenda ſit radix quinta, ſive quadrato-cubica ex quantitate $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$; elicio primum radicem ex quadrato-cubo a^5, deinde per quintuplum ſui quadrato-quadrati $5a^4$ divido terminum $+ 5a^4b$, in quo illud quadrato-quadratum reperitur; & quoniam quotiente hujus diviſionis $+ b$ addito radici a, habetur pro ſumma quantitas $a + b$, cujus quadrato-cubus $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$ ſubductus ex quantitate propoſita dat nihil pro reſiduo; concludo quantitatem illam eſſe quadrato-cubum perfectum, ejuſque radicem eſſe ſummam illam inventam $a + b$.

Verumtamen, ſi elicienda ſit radix quinta, ſive quadrato-cubica ex quantitate $a^5 - 5a^4b - 10a^2b^3 - d^5$; extraho ſimiliter radicem ex quadrato-cubo a^5, perque quintuplum ſui quadrato-quadrati $5a^4$ divido quoque terminum $- 5a^4b$, in quo illud quadrato-quadratum reperitur. Sed quoniam quotiente hujus diviſionis $- b$ addito radici a, habetur

pro

Digitized by Google

pro ſumma quantitas $a - b$, cujus quadrato-cubus $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$ ſiquidem ſubtrahatur ex quantitate propoſita, relinquitur $- 10a^3b^2 - 5ab^4 - d^5 + b^5$; concludendum eſt, quantitatem illam non eſſe quadrato-cubum perfectum, ſed talem fieri, ſi ex ea reſiduum iſtud ſubducatur.

IV.

Extractio radicum ex fractionibus.

AD poteſtates elevari poſſunt non modò quantitates integræ, verùm etiam fractæ, ſive fractiones: unde quum de extractione radicum ex poteſtatibus quantitatum integrarum actum fuerit huc uſque; ſequitur, ut breviter oſtendamus, quo pacto extrahi poſſint radices ex poteſtatibus fractionum.

Et quidem quemadmodum innotuit nobis methodus extrahendi radices ex poteſtatibus quantitatum integrarum, cognita ratione, qua ipſæ quantitates integræ ad poteſtates elevantur; ita non meliùs intelligi poterit, quo pacto ex poteſtatibus fractionum radices extrahantur, quàm intellecto priùs, qua ratione ipſæ

fractiones ad poteſtates evehuntur.

Itaque elevantur fractiones ad datam quamcumque poteſtatem, ſi attollātur ad poteſtatem illam tam numeratores, quàm denominatores fractionum, & ex iis novæ fractiones conſtituantur. Ita fractio $\frac{ab + ac}{m + n}$, ſi ad quadratum debeat elevari, fiet $\frac{a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2}{m^2 + 2mn + n^2}$; nam quadratum numeratoris $ab + ac$ eſt $a^2b^2 + 2a^2bc + a^2c^2$, & quadratum denominatoris $m + n$ eſt $m^2 + 2mn + n^2$. Pariterque fractio $\frac{a + c}{m + n}$ ad cubum elevata evadet $\frac{a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3}{m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3}$; quandoquidem cubus numeratoris $a + c$ eſt $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$, cubus verò denominatoris $m + n$ eſt $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$.

Hinc viciſſim extrahitur quæcumque radix ex qualibet data fractione, ſi extrahatur illa tam ex numeratore, quàm ex denominatore fractionis, & ex iis nova fractio conſtituatur. Ita radix quadrata fra-

fractionis $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{c^2}$ eſt $\frac{a + b}{c}$; quandoquidem quadrata radix numeratoris $a^2 + 2ab + b^2$ eſt $a + b$, & quadrata radix denominatoris c^2 eſt c. Pariterque radix cubica fractionis $\frac{a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3}{27m^3}$ eſt $\frac{a + c}{3m}$; quandoquidem cubica radix numeratoris $a^3 + 3a^2c + 3ac^2 + c^3$ eſt $a + c$, & cubica radix denominatoris $27m^3$ eſt $3m$.

Sed interdum, ut radices ex fractionibus extrahi poſſint, oportet priùs fractiones illas ad minimos terminos reducere. Ita ex fractione $\frac{4ab^2}{ac^2}$ quadrata radix extrahi nequit, quippe quæ nec ex numeratore $4ab^2$, nec ex denominatore ac^2 extrahi poteſt. Sed ſi ea ad minimos terminos reducatur, facile erit, ex ipſa quadratam radicem elicere; nam quum fiat $\frac{4b^2}{c^2}$, erit ejus quadrata radix $\frac{2b}{c}$. Si-

Digitized by Google

militer ex fractione $\frac{8ab^3}{ac^3}$, his termini[s]
expreſſa, radix cubica extrahi non poteſ[t];
ſed quia reducta ad ſimpliciorem ſua[m]
expreſſionem fit $\frac{8b^3}{c^3}$, invenietur pro eju[s]
radice cubica fractio alia $\frac{2b}{c}$.

V.

Geneſis quantitatum incommenſurabilium.

Vulgò duæ quantitatum ſpecies diſtingui ſolent; quarum aliæ dicuntur quantitates commenſurabiles, ſive rationales; aliæ quantitates incommenſurabiles, ſive irrationales. Has duas quantitatum ſpecies conſiderarunt hactenus Mathematici in Arithmetica tantummodo, ubi quantitates per numeros deſignantur: quem in finem vocarunt quantitates commenſurabiles, ſive arithmeticè rationales, quæ numeris poſsunt deſignari; vocarunt verò quantitates incommenſurabiles, ſive arithmeticè irratio-

tionales, quæ nullis numeris exprimi poſſunt.

Sed nihil obſtat, quominus eandem quantitatum diſtinctionem conſideremus etiam in Geometria. Quemadmodum etenim quantitates in Arithmetica per numeros, ita & in Geometria per longitudines rectarum deſignantur: unde ſicuti dicuntur arithmeticè rationales, quæ numeris poſſunt deſignari; & arithmeticè irrationales, quæ nullis numeris exprimi queunt: ita quoque dicendæ ſunt geometricè rationales, quæ per longitudines rectarum exprimi poſſunt, & geometricè irrationales, quæ nullis poſſunt rectis lineis definiri.

Atque hac quantitatum tùm in Arithmetica, cùm in Geometria admiſſa diſtinctione, jam Problemata omnia mathematica in tria poterunt ſumma genera diſpeſci. Unum namque erit eorum, in quibus quantitates quæſitæ numeris perinde ac lineis rectis deſignantur; qualia ſunt illa, quæ vulgò ſimplicia, ſive arithmetica dicuntur. Alterum illorum, in quibus quantitates quæſitæ non quidem ullis numeris, ſed per ſolas lineas rectas exprimuntur. Et tertium denique Problemata illa comprehendet, in quibus

Digitized by Google

quæſitæ quantitates neque ullis numeris, neque ullis rectis lineis poſſunt deſignari.

Jam unde fiat, ut in Geometria quædam quantitates ſint geometricè rationales, quædam geometricè irrationales; alibi, quum dabitur occaſio, oſtendemus. Hic tãtum geneſim quantitatum incommenſurabilium, quatenus conſiderantur in Arithmetica, aperire nobis eſt animus. Itaque oriuntur hujuſmodi quantitates, quum radicem oportet extrahere ex quãtitate aliqua, quæ nequaquam ſit poteſtas perfecta. Nam ſi velim, exempli gratia, extrahere quadratam radicem ex numero 10, quia nullus numerus inveniri poteſt, qui ductus ſemel in ſe ipſum producat 10, jam quæſita radix nullo poterit numero deſignari: proindeque quantitas erit incommenſurabilis, ſive arithmeticè irrationalis.

Sed ex eodem fonte oriuntur etiam quantitates incommenſurabiles in Algebra, ubi magnitudines non numeris, ſed alphabeticis litteris deſignantur. Nam ſi quæratur quadrata radix quantitatis *ab*, jam nulla erit quantitas ſic exprimibilis, ut ducta ſemel in ſe ipſam producat *ab*: quocirca in Algebra quadrata radix

quan-

quantitatis ab non minus eſt quantitas incommenſurabilis, quàm quadrata radix numeri 10 in Arithmetica. Et ob eandem rationem, non minus erit quantitas incommenſurabilis in Algebra radix cubica qaantitatis abc, quàm in Arithmetica radix cubica numeri 25.

Cæterùm, quum ex aliqua quantitate radix extrahi non poteſt, deſignatur communiter illa præfigẽdo quantitati ſignum iſtud $\surd$, quod hac de cauſa ſignũ radicale appellatur. Uſurpatur autem tale ſignum ad deſignandam quamcumq;radicem,ſive quadratam, ſive cubicam, ſive cujuslibet alterius poteſtatis. Sed ad illam diſtinguendam apponitur communiter ſigno radicali numerus, qui eſt index, ſive exponens poteſtatis, de qua agitur. Sic $\surd^2$ eſt ſignum radicis quadratæ, $\surd^3$ ſignum radicis cubicæ, atque ita de aliis: quamquam mos invaluerit, ut quotieſcumque alicui quantitati ſimpliciter ſignum radicale apponitur, de quadrata radice intelligi debeat. Verumtamen, quia quantitates incommenſurabiles conſiderari poſſunt, tamquam poteſtates imperfectæ quantitatum; alia quoque ratione nos eas deſignabimus: quæ tamen ut meliùs intelligatur, exhibenda

Digitized by Google

da eſt priùs idea paulò generalior poteſtatum.

CAP. VI.

Poteſtatum idea generalior exhibetur.

POteſtatem ſuperiùs appellavimus id, quod producitur, quum quantitas aliqua ſemel, aut pluries per ſe ipſam multiplicatur; & indicem, ſive exponentem poteſtatis diximus numerum illum, adſcriptum à tergo quantitati, qui deſignat, quoties quantitas illa per multiplicationem poni debet. Jam, ut hæc poteſtatum idea generalior reddatur, vocabimus in poſterum poteſtatem omnem quantitatem, cui à tergo numerus aliquis ſit adſcriptus; & ſimiliter dicemus exponentem, ſive indicem poteſtatis numerum illum, quem quantitas adſcriptum habet à tergo: qua ratione non minus dicenda erit poteſtas, cujus exponens eſt numerus integer, quàm illa, cujus exponens eſt numerus fractus; & ſimiliter non magis merebitur nomen poteſtatis, quæ habet pro ſuo indice numerum poſitivum, quàm quæ pro exponente habet numerum negativum.

Hac

Hac poteſtatum idea generaliori ſuppoſita, perſpicuum eſt, poteſtates omnes bifariam dividi poſſe; primò nempe in poſitivas, & negativas; ſecundò in perfectas, & imperfectas. Quæ etenim exponentes habent poſitivos, poteſtates erunt poſitivæ; quæ verò negativos, negativæ. Et ſimiliter poteſtates illæ, quarum exponentes ſunt numeri integri, dici poterunt poteſtates perfectæ; eæ verò, quarum exponentes ſunt numeri fracti, poteſtates imperfectæ poterunt appellari. Sic a^2, a^3, a^4 erunt poteſtates poſitivæ perfectæ; & $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ erunt poteſtates poſitivæ imperfectæ. Sed a^{-2}, a^{-3}, a^{-4} erunt poteſtates perfectæ negativæ; & $a^{-\frac{1}{2}}$, $a^{-\frac{1}{3}}$, $a^{-\frac{1}{4}}$ erunt poteſtates negativæ imperfectæ. Cæterùm, ut harum omnium poteſtatum natura meliùs intelligatur; explicanda eſt priùs natura progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ; itemque analogia eſt oſtendenda, quæ inter utramque progreſſionem intercedit.

Digitized by Google

I.

De natura progreſſionis arithmeticæ, & geometricæ.

Quantitates comparari poſſunt inter ſe mutuò duplici quidem ratione; primò nempe ratione exceſſus, vel defectus; & ſecundò ratione continentiæ. Conferuntur duæ quantitates ratione exceſſus, vel defectus; quum quæritur, quantum una excedit alteram, vel ab altera deficit. Conferuntur ratione continentiæ; quum quæritur, quoties una continet alteram, vel in altera continetur.

Quocumque ex his modis duæ quantitates inter ſe mutuò conferantur, ſemper ipſa quantitatum comparatio rationis vocabulo deſignatur. Sed propter duplicem modum, quo conferri poſſunt quantitates inter ſe mutuò, duplex etiam diſtinguitur ſpecies rationis; & una, quæ dicitur Arithmetica, quantitates comparat ratione exceſſus, vel defectus; altera, quæ dicitur geometrica, confert quantitates ratione continentiæ.

Proportio autem eſt duarum rationum æqua-

æqualitas : unde quatuor quantitates dicuntur proportionales, quum ratio inter primam, & ſecundam æqualis eſt rationi inter tertiam, & quartam. Sed & ipſa proportio alia eſt arithmetica, alia geometrica : nam æqualitas duarum rationum arithmeticarum vocatur proportio arithmetica; æqualitas verò duarum rationum geometricarum proportio geometrica appellatur.

Jam proportionis arithmeticæ illud eſt accidens præcipuum, ut ſumma extremorum æqualis ſit ſummæ mediorum. Si etenim a ſit primus terminus progreſſionis arithmeticæ, & c terminus tertius: poſito, quod b ſit exceſſus, quo ſecundus ſuperat primum, & quartus ſuperat tertium; erit $a + b$ ſecundus terminus, & $c + b$ terminus quartus : unde quum a, $a + b$, c, $c + b$ ſint quatuor termini proportionis arithmeticæ, liquet ſummam extremorum $a + c + b$ æqualem eſſe ſummæ mediorum $a + b + c$.

Proportionis autem geometricæ ea eſt proprietas præcipua, ut productum ex multiplicatione extremorum æquale ſit producto ex multiplicatione mediorum. Nam ſi a ſit primus terminus proportionis geometricæ, & c terminus tertius: poſito,

ſito ; quod *b* deſignet, quoties ſecundus continet primum, itemque quartus continet tertium; erit *ab* ſecundus terminus, & *cb* terminus quartus : unde, quum *a*, *ab*, *c*, *cb* ſint quatuor termini proportionis geometricæ, liquet productum ex multiplicatione extremorum *acb* æquale eſſe producto ex multiplicatione mediorum *abc*.

Tam arithmetica, quàm geometrica proportio quatuor terminos requirunt; quum utraque ſit æqualitas duarum rationum, quarum unaquæque duos terminos exigit. Sed poſſunt etiam ſub tribus conſiſtere, ſcilicet quum terminus medius bis ſumitur. Id quum accidit, proportio dicitur continua : & perſpicuum eſt, in proportione continua arithmetica ſummam extremorum æqualem eſſe duplo termini medii; in proportione continua geometrica productum ex mnltiplicatione extremorum æquale eſſe quadrato, quod fit ex termino medio.

Quum non tres, ſed plures habentur quantitates continuè proportionales, dicentur eæ progreſſionem conſtituere. Atque hæc rurſus erit, vel arithmetica, vel geometrica : prout nempe quantitates, progreſſionem conſtituentes, ſunt vel arith-

arithmeticè, vel geometricè proportionales. Ita ſeries numerorum 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13 &c. conſtituunt progreſſionem arithmeticam; quia eadem ubique differentia. Et viciſſim ſeries numerorum 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c. conſtituit progreſſionem geometricam; quia eadem ubique continentia.

Hinc, quum inter terminos progreſſionis arithmeticæ eadem ubique differentia ſervetur, & quantum primus terminus deficit à ſecundo, tantundem ſecundus deficiat à tertio, tertius à quarto, atque ita deinceps; perſpicuum eſt, quod ſi in hujuſmodi progreſſione primus terminus dicatur a, & exceſſus, quo ſecundus ſuperat primum, dicatur b, ſit $a + b$ ſecundus terminus, $a + 2b$ terminus tertius, $a + 3b$ terminus quartus, atque ita in infinitum: qua ratione progreſſionis arithmeticæ termini omnes ſic poterunt exhiberi $a, a + b, a + 2b, a + 3b, a + 4b, a + 5b$ &c.

Et ſimiliter, quia inter terminos progreſſionis geometricæ eadem ubique continentia ſervatur, & quoties primus terminus continetur in ſecundo, toties ſecundus continetur in tertio, tertius in quarto, atque ita de aliis; perſpicuum eſt, quod

quod ſi in hac alia progreſſione primus terminus dicatur *a*, & deſignet *b*, quoties ſecundus continet primum, ſit *ab* ſecundus terminus, ab^2 terminus tertius, ab^3 terminus quartus, atque ita deinceps: qua ratione progreſſionis geometricæ termini omnes ſic poterunt efferri *a*, *ab*, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5 &c.

Ex quibus modò facilè erit, utriuſque progreſſionis proprietates principaliores intelligere. Nam in progreſſione arithmetica evidens eſt, hæc duo eſſe accidentia præcipua. Primum, quod ſumma duorum quorumvis terminorum æqualis ſit ſummæ ex duobus aliis, æqualiter hinc inde diſtantibus ab iis. Alterum, quod duplum unius termini adæquet ſummam duorum aliorum, qui utrinque æquè diſtent ab eo.

In progreſſione autem geometrica has duas licet principaliores cernere proprietates. Prima eſt, quod productum ex duobus terminis, inter ſe mutuò multiplicatis, æquale ſit ei, quod producitur ex multiplicatione mutua duorum aliorum, utrinque ab iis æqualiter diſtantium. Altera, quod quadratum unius termini æquale ſit ei, quod oritur, multiplicando ſimul duos alios terminos, qui hinc inde æqualiter diſtent ab illo. *Ana-*

II.

Analogia inter progreſſionem arithmeticam, & geometricam.

OStenſa natura progreſſionis tum geometricæ, cùm arithmeticæ; oſtendenda eſt modò analogia, quæ inter utramque progreſſionem intercedit. Hæc potiſſimum conſiſtit in eo, quod quemadmodum termini progreſſionis arithmeticæ additione, & ſubtractione; ita termini progreſſionis geometricæ multiplicatione, & diviſione inveniantur. Analogiam iſtam novit primus omnium, vel ſaltem paulò diligentiùs conſideravit Johannes Neperus Scoto-Brittannus; & ex ea collegit mirificum logarithmorum inventum, compendium arithmeticum numquam ſatis deprædicandum.

Jàm ex hac analogia illud ſpontè ſua conſequitur, quod ſi termini, progreſſionem artithmeticam conſtituentes, aſſumantur velut indices, ſive exponentes eorum, qui conſtituunt progreſſionem geometricam, & in iſta capiantur quatuòr termini geometricè proportionales, ſumma ex exponentibus extremorum æqualis

lis ſit ſummæ ex exponentibus mediorum. Nam ex hypotheſi exponentes eorum terminorum ſunt termini totidem arithmeticè proportionales. Sed quatuor terminorum arithmeticè proportionalium illud eſt accidens præcipuum, ut ſumma extremorum æqualis ſit ſummæ mediorum. Itaque, ſi capiantur in progreſſione geometrica quatuor termini geometricè proportionales, ſumma ex exponentibus extremorum adæquabit ſummam ex exponentibus mediorum.

Quod ſi verò in progreſſione geometrica capiantur tres termini geometricè proportionales, tunc ſumma ex exponentibus extremorum æqualis erit duplo exponẽtis termini medii. Nam ex hypotheſi exponentes trium illorum terminorum ſunt termini totidem arithmeticè proportionales. Sed trium terminorum arithmeticè proportionalium ea eſt proprietas præcipua, ut ſumma exremorum æqualis ſit duplo termini medii. Itaque, ſi in progreſſione geometrica capiantur tres termini geometricè proportionales, ſumma ex exponentibus extremorum adæquabit duplum exponentis, qui refertur ad terminum medium.

Atque ex his utriuſque progreſſionis ſi-

ſimul junctæ proprietatibus, aliæ etiam colligi poſſunt. Nam ſi progreſſio geometrica incipiatur ab unitate, progreſſio verò arithmetica à zero, ſive nihilo, quod proinde ſit index, ſive exponens unitatis; conſequitur primò, ſummam ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris, producti exponentem adæquare. Etenim ex multiplicationis definitione, unitas eſt ad multiplicatorem, ut multiplicandus ad productum: quare ex oſtenſis ſumma ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris æqualis erit ſummæ ex exponentibus unitatis, & producti. Sed ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero, ſive nihilum. Itaque ſumma ex exponentibus multiplicandi, & multiplicatoris ſolius producti exponentem adæquabit.

Conſequitur ſecundò, differentiam exponentium dividendi, & diviſoris, quotientis exponētem adæquare. Nam ex definitione diviſionis, diviſor eſt ad dividendum, ut unitas ad quotientem: quare ex oſtenſis ſumma ex exponentibus diviſoris, & quotientis æqualis erit ſummæ ex exponentibus dividendi, & unitatis. Jam verò ex hypotheſi exponens unitatis eſt zero, ſive nihilum. Itaque ſumma exponentium diviſoris, & quotientis adæqua-

bit exponentem ſolius dividendi: & propterea, ſi ex exponente dividendi ſubducatur exponens diviſoris, dabit reſiduum, ſive differentia exponentem quotientis.

Conſequitur tertiò, duplum exponentis alicujus quantitatis adæquare exponentem ſui quadrati, triplum exponentem ſui cubi, quadruplum exponentem ſui quadrato-quadrati, atque ita deinceps. Nam quum quadratum oriatur, multiplicando latus per ſe ipſum; erunt unitas, latus, & quadratum in geometrica proportione; ac proinde ſumma exponentium unitatis, & quadrati, hoc eſt exponens ſolius quadrati æqualis erit exponenti lateris duplicato. Et eâdem ratione, quia ex ipſa cubi geneſi unitas, latus, quadratum, & cubus ſunt in geometrica proportione; erit ſumma exponentium unitatis, & cubi, hoc eſt exponens ſolius cubi æqualis ſummæ exponentium lateris, & quadrati, hoc eſt exponenti ſolius lateris triplicato.

Et denique conſequitur, ſemiſſem exponentis alicujus quantitatis æqualem eſſe exponenti ſuæ radicis quadratæ, trientem exponenti ſuæ radicis cubicæ, quadrantem exponenti ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps. Nam ex iis,

quæ

Digitized by Google

quæ modò oſtenſa ſunt, exponens alicujus quantitatis eſt æqualis duplo exponentis ſuæ quadratæ radicis, triplo exponentis ſuæ radicis cubicæ, quadruplo exponentis ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps: quare erit per contrarium ſemiſſis exponentis ejuſdem quantitatis æqualis exponenti ſuæ quadratæ radicis, triens æqualis exponenti ſuæ radicis cubicæ, quadrans æqualis exponenti ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita in infinitum.

III.

Natura poteſtatum poſitivarum, & negativarum.

JAm cognita analogia, quæ exiſtit inter progreſſionem arithmeticam, & progreſſionem geometricam; haud difficile modò erit, naturam omnium poteſtatum intelligere. Itaque quum prima poteſtatum diviſio, ſuperius à nobis propoſita, ſit in poſitivas, & negativas; hoc eſt in illas, quæ exponentes habent poſitivos; & eas, quarum exponentes ſunt negativi: videamus primò, quæ ſit natura harum poteſtatum, quave ratione nega-

tivæ à poſitivis ſint diſtinguendæ.

Et quidem circa poteſtates poſitivas, quarum exponentes ſunt numeri integri, jam illud ab initio ſtatuimus, eas exponentibus ſuis deſignare, quoties quantitas per multiplicationem poni debet: ita nempe, ut a, ſive a^1 deſignet ipſam quantitatem a ſemel poſitam; a^2 eandem quantitatem a poſitam bis, hoc eſt productum, quod oritur, multiplicando a ſemel per ſeipſam; a^3 eandem adhuc quantitatem a poſitam ter, hoc eſt id, quod oritur, multiplicando a bis per ſe ipſam; atque ita de aliis.

Ex quo id porro conſequitur, poteſtates iſtas omnes poſitivas, ſi ordine ſcribantur, progreſſionem geometricam conſtituere; quandoquidem a^1 eſt ad a^2, ut a^2 ad a^3; a^2 eſt ad a^3, ut a^3 ad a^4; a^3 eſt ad a^4, ut a^4 ad a^5; atque ita deinceps: quum in unaquaque iſtarum proportionum productum ex terminis mediis æquale eſſe ei, quod ex extremorum multiplicatione producitur; ex ipſa earum poteſtatum aſſumpta conſtitutione ſit manifeſtum.

Hinc, quia exponentes earumdem poteſtatum ſunt numeri totidem, qui ſi ordine quoque ſcribantur, progreſſionem

conſtituunt arithmeticam, jam quod de utraque progreſſione ſimul juncta paulò ante oſtenſum eſt, iis poterit applicari: quocirca ſi in ſerie illa poteſtatum capiantur tres, vel quatuor termini geometricè proportionales; ſumma ex exponentibus extremorum adæquabit, vel ſummam ex exponentibus mediorum, vel duplum exponentis termini medii.

Huic autem principio inſiſtentes, cognoſcemus primò, quod ſi ſeriem illam poteſtatum incipiamus ab unitate, utpote quæ cum ipſis illis poteſtatibus adhuc progreſſionem conſtituit, exponens ejus debeat eſſe zero, ſive nihilum. Unitas quippe eſt ad a^1, ut a^1 ad a^2. Itaque ſumma exponentium, qui referuntur ad a^2, & unitatem, æqualis erit duplo exponentis, qui refertur ad a^1. Jam verò exponens ſolius a^2 adæquat duplum exponentis, qui refertur ad a^1. Itaque exponens unitatis debet eſſe zero, ſive nihilum.

Verumtamen, quia quum exponens unitatis eſt zero, ſive nihilum, tunc ſumma exponentium multiplicandi, & multiplicatoris, producti exponentem adæquat; cognoſcemus ſecundò a^5 eſſe productum, quod oritur, multiplicando a^2 per a^3; a^7 id, quod oritur, multiplican-

do a^3 per a^4; atque ita deinceps. Quamque in eadem hypotheſi exponens diviſoris, ſubductus ab exponente dividendi, relinquat exponentem quotientis; cognoſcemus quoque a^3 eſſe quotientem, qui oritur, dividendo a^5 per a^2; a^4 eum, qui oritur, dividendo a^7 per a^3; atque ita de aliis.

Unde haud difficile modò erit, naturam poteſtatum negativarum intelligere. Nam quemadmodum a^3 eſt quotiens, qui oritur, dividendo a^5 per a^2; ita a^{-3} deſignare debet quotientem, qui producitur, dividendo viciſſim a^2 per a^5, quandoquidem ſi ex exponente dividendi a^2 ſubducatur exponens diviſoris a^5, reſiduum erit $2-5$, hoc eſt -3. Et ob eandem rationem ſicuti a^4 eſt quotiens, qui oritur, dividendo a^7 per a^3; ita a^{-4} erit quotiens, qui producitur, dividendo viciſſim a^3 per a^7.

Quocirca poteſtates negativæ nihil aliud erunt, quàm fractiones, quæ tamquam numeratores habebunt unitatem, tamquam denominatores verò ipſas illas poteſtates, velut poſitivas conſideratas.

Nam

Digitized by Google

Nam ex oſtenſis a^{-3} deſignat quotientem, qui oritur, dividendo a^2 per a^5. Sed diviſo a^2 per a^5, quotiens producitur $\frac{1}{a^3}$. Itaque a^{-3} idem erit, ac $\frac{1}{a^3}$. Atque ita quoque a^{-1} idem planè erit, ac $\frac{1}{a}$; a^{-2} idem, ac $\frac{1}{a^2}$; a^{-4} idem, ac $\frac{1}{a^4}$, ſicque in infinitum.

Ex quo patet, ope poteſtatum negativarum fractiones poſſe quodammodo ad quantitates integras revocari. Nam in fractione $\frac{a^3}{c^2}$ quantitas a^3 reperitur multiplicata per $\frac{1}{c^2}$: proindeque, quia $\frac{1}{c^2}$ idem eſt, ac c^{-2}, ſcribi poterit loco ejus fractionis a^3c^{-2}. Et ſimiliter, quia in fractione $\frac{b^4}{a^3}$ quantitas b^4 reperitur multi-

plicata per $\frac{1}{a^2}$, hoc eſt per $\overset{-2}{a}$; deſignari poterit fractio illa ad inſtar quantitatis integræ in hunc modum $\overset{4}{b} . \overset{-2}{a}$.

Sed viciſſim ope earumdem poteſtatum, poterunt quantitates integræ quodammodo ad fractiones revocari. Nam quantitas integra a^3c^2 producitur dividendo a^3 per $\frac{1}{c^2}$: proindeque, quia $\frac{1}{c^2}$ idem eſt, ac $\overset{-2}{c}$, ſcribi poterit loco ejus $\frac{a^3}{\overset{-2}{c}}$. Et ſimiliter, quia quantitas integra b^4a^2 oritur dividendo b^4 per $\frac{1}{a^2}$, hoc eſt b^4 per $\overset{-2}{a}$; deſignari ea poterit ad inſtar fractionis in hunc alium modum $\frac{b^4}{\overset{-2}{a}}$.

Na-

IV.

Natura poteſtatum perfectarum, & imperfectarum.

ALtera poteſtatum diviſio, ſuperiùs à nobis propoſita, eſt in perfectas, & imperfectas; hoc eſt in poteſtates, quarum exponentes ſunt numeri integri, & potestes, quæ fractiones pro ſuis exponentibus habent. Quum itaque oſtenſa jam ſit natura poteſtatum poſitivarum, & negativarum; ſequitur, ut aliarum harum poteſtatum naturam explicemus, & quid diſcriminis interſit inter poteſtates perfectas, ac imperfectas oſtendamus.

Hunc in finem conſideremus rurſus, poteſtates perfectas poſitivas, ordine diſpoſitas, progreſſionem geometricam conſtituere; earundemque indices, ſive exponentes, ordine quoque collocatos, progreſſionem alteram arithmeticam componere. Et quoniam oſtenſum jam eſt, quod ſi ſeriem illam poteſtatum incipiamus ab unitate, exponens ejus debeat eſſe zero, ſive nihilum: proinde quæ §.II. hujus capitis de utraque progreſſione ſimul juncta poſtremo loco à nobis ſunt demonſtrata, jam

jam vera erunt de poteſtatibus illis relatè ad ſuos exponentes.

Itaque de illis poteſtatibus in ordine ad ſuos exponentes illud porro ſtatui poteſt, quod duplum exponentis alicujus poteſtatis adæquet exponentem ſui quadrati, triplum exponentem ſui cubi, quadruplum exponentem ſui quadrato-quadrati, atque ita deinceps: unde poteſtatis hujus a^2 quadratum erit a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis; & ſimiliter alterius hujus poteſtatis a^3 quadratum erit a^6, cubus a^9, quadrato-quadratum a^{12}, atque ita in infinitum.

Sed illud etiam de iiſdem poteſtatibus relatè ad ſuos exponentes velut certum poteſt aſſumi, quod ſemiſſis exponentis alicujus poteſtatis adæquet exponentem ſuæ quadratæ radicis, triens exponentem ſuæ radicis cubicæ, quadrans exponentem ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps: qua ratione poteſtatis hujus a^{12} quadrata radix erit a^6, radix cubica a^4, radix quadrato-quadrata a^3, atque ita de aliis. Et ſimiliter alterius hujus poteſtatis a^{24} radix quadrata erit a^{12}, radix cubica a^8, radix quadrato-quadrata a^6, atque ita in infinitum.

Ua-

Unde modò facile erit; naturam poteſtatum imperfectarum intelligere. Nam quemadmodum a^2 eſt quadrata radix poteſtatis a^4, ita $a^{\frac{1}{2}}$ deſignare debet quadratam radicem, quæ elicitur ex a, ſive a^1; quippe ſicuti exponens ipſius a^2 eſt ſemiſſis exponentis alterius a^4, ita exponens ipſius $a^{\frac{1}{2}}$ adæquat ſemiſſem exponentis alterius a^1. Et ſimiliter ſicuti a^2 eſt radix cubica poteſtatis a^6, ita $a^{\frac{1}{3}}$ erit radix cubica, quæ extrahitur ex a^1; quandoquidem non minus exponens ipſius a^2 eſt tertia pars exponentis alterius a^6, quàm exponens ipſius $a^{\frac{1}{3}}$ eſt tertia pars exponentis alterius a^1.

Ob eandem rationem $a^{\frac{3}{2}}$ deſignabit quadratam radicem ipſius a^3; $a^{\frac{2}{3}}$ radicem cubicam ipſius a^2; $a^{\frac{3}{4}}$ radicem quadrato-quadratam ipſius a^3; atque ita de aliis: quocirca poteſtates imperfectæ, ſive quæ fractiones pro ſuis exponentibus habent, nihil aliud erunt, quàm radices deſigna-

ſignatæ à denominatoribus fractionum, & extractæ ex poteſtatibus, quarum exponentes ſunt ſoli numeratores earundem fractionum: ut $a^{\frac{1}{2}}$, quæ eſt radix ſecunda ipſius a^1; $a^{\frac{2}{3}}$, quæ eſt radix tertia ipſius a^2; $a^{\frac{3}{5}}$, quæ eſt radix quinta ipſius a^3; atque ita deinceps.

Jam autem, quum poteſtates perfectæ negativæ, & ipſæ quoque ordine diſpoſitæ, progreſſionem geometricam conſtituant; earumdemque exponentes, ordine collocati, progreſſionem quoque alteram componant arithmeticam; & exponens unitatis in ordine ad eas ſit etiam zero, ſive nihilum: perſpicuum eſt, quæcumque de poteſtatibus perfectis poſitivis dicta ſunt, ea omnia vera eſſe quoque de poteſtatibus perfectis negativis.

Quocirca quemadmodum poteſtatis hujus perfectæ poſitivæ a^2 quadratum eſt a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis; ita quoque poteſtatis hujus perfectæ negativæ a^{-2} quadratum erit a^{-4}, cubus a^{-6}, quadrato-quadratum

tum a^{-8}, & ſic deinceps in infinitum. Pariterque quemadmodum poteſtatis hujus perfectæ poſitivæ a^{12} quadrata radix eſt a^{6}, radix cubica a^{4}, radix quadrato-quadrata a^{3}, & ſic deinceps; ita quoque poteſtatis hujus perfectæ negativæ a^{-12} quadrata radix erit a^{-6}, radix cubica a^{-4}, radix quadrato-quadrata a^{-3}, atque ita in infinitum.

Unde porro ſicuti $a^{\frac{1}{2}}$ eſt quadrata radix ipſius a^{1}, $a^{\frac{1}{3}}$ radix cubica ejuſdem a^{1}. Ita $a^{-\frac{1}{2}}$ erit quadrata radix ipſius a^{-1}, & $a^{-\frac{1}{3}}$ radix cubica ejuſdem a^{-1}. Et præterea quemadmodum $a^{\frac{3}{2}}$ eſt radix quadrata ipſius a^{3}, $a^{\frac{2}{3}}$ eſt radix cubica ipſius a^{2}; ita $a^{-\frac{3}{2}}$ erit radix quadrata poteſtatis negativæ a^{-3}, & $a^{-\frac{2}{3}}$ radix cubica po-

poteſtatis negativæ a^{-2}; proindeque quia a^{-2}, a^{-3} idem ſunt, ac $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$; erit $a^{-\frac{3}{2}}$ radix quadrata fractionis $\frac{1}{a^3}$, & $a^{-\frac{2}{3}}$ radix cubica fractiouis $\frac{1}{a^2}$.

Ex quibus jam liquet id, quod in calce capitis antecedentis dicebamus: nimirum quantitates incommenſurabiles conſiderari poſſe velut poteſtates imperfectas quantitatum, & proinde ad inſtar poteſtatum perfectarum alia poſſe ratione deſignari: quocirca quadratam radicem quantitatis a deſignabimus deinde non modò per $\sqrt{a}$, verùm etiam per $a^{\frac{1}{2}}$; & ſimiliter radicem cubicam quantitatis a^2 oſtendemus non modò per $\sqrt[3]{a^2}$, verùm etiam per $a^{\frac{2}{3}}$. Sed quemadmodum quadrata radix quãtitatis cõpoſitæ $a + c$ deſignatur vulgò per $\sqrt{a + c}$, hoc eſt lineola poſita ſuper partibus quantitatis; ita oſtendetur etiam à nobis per $\overline{a + c}^{\frac{1}{2}}$: un-

unde monitũ Lectorem hîc volo, non idem eſſe $\overline{a+c}^{\frac{1}{2}}$, & $a+c^{\frac{1}{2}}$; nam expreſſio illa idem valet, ac $\sqrt{a+c}$; iſta verò idem ſignificat, ac $a+\sqrt{c}$.

V.

Calculus poteſtatum per exponentes.

NAtura poteſtatum omnium explicata, traditaque differentia, quæ reperitur tam inter poteſtates poſitivas, & negativas, quàm inter poteſtates perfectas, & imperfectas; non abs re fore puto, hîc breviter oſtendere, quo pacto earumdem poteſtatum calculus poſſit per exponentes inſtitui. Itaque operationes, quæ circa poteſtates omnes, adhibitis exponentibus, alia ratione, & quidem longè faciliori inſtitui poſſunt, ſunt multiplicatio, diviſio, formatio poteſtatum, & extractio radicum.

Et quidem, quantum ad multiplicationem duarum poteſtatum unius, ejuſdemque quantitatis, inſtituitur illa, addendo ſimul exponentes datarum poteſtatum, & ſcribendo ſummam pro exponente producti. Cujus equidem ratio exinde dependet, quia quotieſcumque index, ſive ex-

ponens unitatis eſt zero, ſive nihilum, tum ſumma exponentium multiplicandi, & multiplicatoris producti exponentem adæquat.

Hac ratione ad multiplicandum a^2 per a^3, ſcribendum eſt a^5; quia exponentes 2, & 3 ſimul additi conficiunt 5. Similiter ad multiplicandum a^5 per a^{-3}, ſcribendum eſt a^2; quia ſumma exponentium 5, & -3 eſt $5-3$, hoc eſt 2. Atque ita quoque ad multiplicandum a^2 per $a^{\frac{1}{2}}$, ſcribi debet $a^{\frac{5}{2}}$; quum 2, & $\frac{1}{2}$ ſimul ſint $\frac{5}{2}$. Pariterque erit $a^{-\frac{3}{2}}$ productum, quod oritur multiplicando a^{-2} per $a^{\frac{1}{2}}$; quandoquidem -2, & $\frac{1}{2}$ ſimul ſunt $-\frac{3}{2}$.

Quantum ad mutuam duarum poteſtatum unius, ejuſdemque quantitatis diviſionem, inſtituitur illa, ſubducendo à ſe mutuò exponentes datarum poteſtatum, & ſcribendo reſiduum, ſive differentiam pro exponente quotientis. Quod quidem exinde dependet, quia quum index, ſive exponens unitatis eſt zero, ſive nihilum,

tum

ſum exponens diviſoris, ſubtractus ab exponente dividendi, relinquat exponentem quotientis.

Hoc pacto ad dividendum a^5 per a^2, ſcribendum eſt a^3; quia exponens 2, ſubductus ab exponente 5, relinquit 3. Similiter ad dividendum a^2 per a^{-3}, ſcribendum eſt a^5; quia ſi ex exponente 2 ſubtrahatur exponens -3, reſiduum erit $2 + 3$, hoc eſt 5. Atque ita quoque ad dividendum $a^{\frac{5}{2}}$ per a^2, ſcribi debet $a^{\frac{1}{2}}$; quia ſi ex $\frac{5}{2}$ ſubtrahatur 2, reſiduum fiet $\frac{1}{2}$. Pariterque erit a^{-2} quotiens, qui oritur, dividendo $a^{-\frac{3}{2}}$ per $a^{\frac{1}{2}}$; quum $\frac{1}{2}$, ſubtractus ex $-\frac{3}{2}$, relinquat -2.

Quantum ad formationem poteſtatum, fiet ea, ſi exponens datæ poteſtatis toties accipiatur, quot ſunt unitates in indice, ſive exponente poteſtatis, ad quam illa eſt elevanda. Cujus etiam ratio exinde eſt repetenda, quia ubi exponens unitatis eſt zero, ſive nihilum, tum duplum

exponentis alicujus quantitatis adæquat exponentem ſui quadrati, triplum exponentem ſui cubi, quadruplum exponentẽ ſui quadrato-quadrati, atque ita deinceps.

Sic quadratum poteſtatis perfectæ poſitivæ a^2 erit a^4, cubus a^6, quadrato-quadratum a^8, atque ita de aliis. Et ſimiliter poteſtatis perfectæ negativæ a^{-2} quadratũ erit a^{-4}, cubus a^{-6}, quadrato-quadratũ a^{-8}, & ſic deinceps in infinitũ. Sed eãdẽ ratione poteſtatis imperfectæ poſitivæ $a^{\frac{1}{2}}$ quadratum erit a^1, cubus $a^{\frac{3}{2}}$, quadrato-quadratum a^2. Atque ita quoque poteſtatis imperfectæ negativæ $a^{-\frac{1}{2}}$ quadratum erit a^{-1}, cubus $a^{-\frac{3}{2}}$, quadrato-quadratum a^{-2}.

Denique quantum ad radicum extractionem, inſtituetur ea, ſi ex exponente datæ poteſtatis ea pars capiatur, quam denominat index, ſive exponens radicis extrahendæ. Quod exinde etiam repeti debet, quia quum exponens unitatis eſt zero,

zero, ſive nihilum, tum ſemiſſis exponentis alicujus quantitatis adæquat exponentem ſuæ quadratæ radicis, triens exponentem ſuæ radicis cubicæ, quadrans exponentem ſuæ radicis quadrato-quadratæ, atque ita deinceps.

Hac ratione radix quadrata poteſtatis perfectæ poſitivæ a^2 erit a^1, radix cubica $a^{\frac{2}{3}}$, radix quadrato-quadrata $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſimiliter poteſtatis perfectæ negativæ a^{-2} radix quadrata erit a^{-1}, radix cubica $a^{-\frac{2}{3}}$, radix quadrato-quadrata $a^{-\frac{1}{2}}$. Sed ob eandem rationem radix quadrata poteſtatis imperfectæ poſitivæ $a^{\frac{1}{2}}$ erit $a^{\frac{1}{4}}$, radix cubica $a^{\frac{1}{6}}$, radix quadrato-quadrata $a^{\frac{1}{8}}$. Atque ita quoque poteſtatis imperfectæ negativæ $a^{-\frac{1}{2}}$ radix quadrata erit $a^{-\frac{1}{4}}$, radix cubica $a^{-\frac{1}{6}}$, radix quadrato-quadrata $a^{-\frac{1}{8}}$.

Cæterùm, quum fractiones mediantibus exponẽtibus negativis poſſint quodãmodo ad quãtitates integras revocari; nolim hîc ſilẽtio præterire, hujuſmodi artificio poſſe calculũ fractionũ iiſdem omnino regulis perfici, quibus calculus quantitatum integrarum inſtituitur. Sed quia ex hactenus dictis id cuique ſatis liquere arbitror, ſufficiat illud adnotaſſe, & omnino ſuperfluum exiſtimo diutiùs in hiſce immorari.

CAP. VII.

Calculus radicalium ſimplicium.

Quoniam quantitates incommenſurabiles, quæ etiam radicales dicuntur, ſæpe ſæpiùs & ipſæ ad calculum poni debent: proinde, ne quum id contingit, hæreant Tyrones, earum quoque calculum oportet oſtendamus. Quod equidem eò accuratiùs à nobis fieri debet, quia de hujuſmodi calculo nihil fermè traditur in Arithmetica vulgari. Hunc in finem non modò in quantitatibus litteralibus, verùm etiam in quantitatibus numericis lubet ejus periculum facere. Et quoniam quantitates radicales, perinde ac rationales, ſive commenſurabiles, dividi poſſunt

in

in ſimplices, & compoſitas; idcirco primò agemus de calculo radicalium ſimplicium, tum de calculo radicalium compoſitarum verba faciemus.

Quantitates radicales dicuntur ſimplices, quotieſcumque unicum habent terminum, eumque effectum ſigno radicali, ut $\sqrt{a}$, $\sqrt{c}$, $\sqrt{ac}$. Harum quantitatum calculus ut meliùs intelligatur, præmittendum eſt primò, quod ſicuti ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum quantitatis commenſurabilis a, ſcribitur $2a$, $3a$, $4a$; ſic ad deſignandum duplum, triplum, quadruplum quantitatis radicalis $\sqrt{a}$, ſcribendum ſit $2\sqrt{a}$, $3\sqrt{a}$, $4\sqrt{a}$: proindeque quemadmodum $2a + 3a$ idem ſunt, ac $5a$; & $5a - 3a$ idem, ac $2a$: ita quoque $2\sqrt{a} + 3\sqrt{a}$ idem erunt, ac $5\sqrt{a}$; & $5\sqrt{a} - 3\sqrt{a}$ idem, ac $2\sqrt{a}$.

Quin etiam, quemadmodum ſi quantitas a toties accipienda ſit, quot ſunt partes in c, ſcribitur ca; ita quoque $c\sqrt{a}$ deſignabit, quantitatem incommenſurabilem $\sqrt{a}$ toties accipiendam eſſe, quot ſunt partes in c: qua ratione multiplicabitur quævis quantitas radicalis per quamlibet quantitatem commenſurabilem, ac rationalem, ſcribendo illam poſt iſtam nul-

Digitized by Google

lo ſigno interjecto; ut ad multiplicandum $\surd b$ per a, ſcribo $a\surd b$; & ſimiliter ad multiplicandum $\surd 5$ per 3, ſcribo $3\surd 5$.

Jam quantitates, quæ ſunt extra ſignum radicale, ſive ſint numericæ, ſive litterales, dicentur in poſterum coefficientes earum, quæ ſub ſigno reperiuntur. Sed facilè erit, eas quoque ſub eodem ſigno radicali reponere: ſcilicet ſi elevatæ ad poteſtatem, deſignatam ab exponente ſigni radicalis, multiplicentur per quantitates, ſub ſigno exiſtentes: qua ratione $2\surd 3$ idem erit, ac $\surd 12$; & $c\surd a$ idem, ac $\surd ac^2$: pariterque $3\surd^3 2$ idem erit, ac $\surd^3 54$; & $c\surd^3 a$ idem, ac $\surd^3 ac^3$.

Sed viciſſim ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, poterunt quandoque nonnullæ extra ſignum collocari: ſcilicet ſi ex iis extrahi poſſit radix, à ſigno radicali denominata. Ita quia in $\surd ac^2$ reperitur ſub ſigno radicali quantitas c^2, ex qua extrahi poteſt quadrata radix; proinde collocabitur illa extra ſignum, ſcribendo $c\surd a$. Et ſimiliter, quia in $\surd^3 54$ numerus 54 oritur, multiplicando 27 per 2, & ex 27 extrahi poteſt radix cubica; idcirco collocabitur numerus 27 extra ſignum, ſcribendo $3\surd^3 2$.

Atque hac ratione perſpicuum eſt, quãtita-

titates radicales longè ſimpliciùs deſignari. Quocirca, ut eædem quantitates ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur, præſtat extra ſignum collocare eas omnes quantitates, ex quibus elici poteſt radix, à ſigno denominata. Ita, quia in $\sqrt{4ac^2}$ quadrata radix elici poteſt, non modò ex c^2, verùm etiam ex 4; ſimplicior quantitatis propoſitæ expreſſio erit $2c\sqrt{a}$. Et ſimiliter, quia in $\sqrt[3]{27ac^3}$ extrahi poteſt radix cubica non ſolùm ex c^3, verùm etiam ex 27; ſimplicior ejus quantitatis expreſſio erit $3c\sqrt[3]{a}$.

Vulgò Algebriſtæ, ad reducendas quantitates radicales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, dividunt eas per maximam poteſtatem, à radicali ſigno denominatam, quæ in iis continetur. Ut quia maximum quadratum, quod continetur in $4ac^2$, eſt $4c^2$, cujus radix eſt $2c$; proinde diviſo $4ac^2$ per $4c^2$, reducetur quantitas radicalis $\sqrt{4ac^2}$ ad hanc aliam $2c\sqrt{a}$. Et ſimiliter quia maximus cubus, qui continetur in $27ac^3$, eſt $27c^3$, cujus radix eſt $3c$; idcirco diviſo $27ac^3$ per $27c^3$, mutabitur quantitas radicalis $\sqrt[3]{27ac^3}$ in hanc aliam $3c\sqrt[3]{a}$.

Jam reductis quantitatibus radicalibus ad

ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, cognoſci poteſt, num ratio, quæ inter eas exiſtit, ſit commenſurabilis, necne. Si enim contigerit, illas eandem ſub ſignis radicalibus quantitatem habere, erit earum ratio commenſurabilis, ac rationalis, utpote quæ illa eadem, quæ inter earundem coefficientes exiſtit; ſecus verò, ſi ſub ſignis radicalibus diverſas habeant quantitates: qua ratione $2\surd 3$ ad $4\surd 3$ erit, ut 2 ad 4, ſive ut 1 ad 2; pariterque $2a\surd b$ ad $2c\surd b$ erit, ut $2a$ ad $2c$, ſive ut a ad c.

I.

Additio radicalium ſimplicium.

UT duæ, aut plures radicales ſimplices addantur in unum, reducendæ ſunt eæ methodo jam tradita ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſi cōtigerit, eas ſic reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere, fiet additio, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, & ſcribendo ſummam velut coefficientem ejuſdem quantitatis radicalis.

Hac ratione, ſi addendæ ſint ſimul quantitates duæ radicales $\surd 8$, & $\surd 72$; reduco primùm eas ad ſimpliciores ſuas expreſ-

preſſiones, earumque una fiet $2\sqrt{2}$, altera $6\sqrt{2}$: unde quia ſic reductæ eandem ſub ſigno radicali habent quantitatem, addo ſimul earum coefficientes 2, & 6; eritque ſumma quæſita $8\sqrt{2}$, ſive $\sqrt{128}$.

Similiter ſi proponantur in unum addendæ quantitates duæ radicales $\sqrt[3]{24}$, & $\sqrt[3]{648}$; reduco primùm illas ad ſuas ſimpliciores expreſſiones : & quia earum una fit $2\sqrt[3]{3}$, altera $6\sqrt[3]{3}$; erit ſumma quæſita $8\sqrt[3]{3}$, ſive $\sqrt[3]{1536}$. Atque ita quoque ſumma quantitatum radicalium $\sqrt{4a}$, & $\sqrt{9a}$, erit $5\sqrt{a}$, ſive $\sqrt{25a}$; pariterque erit $7c\sqrt{a}$, ſive $\sqrt{49ac^2}$ ſumma quantitatum radicalium $\sqrt{4ac^2}$, & $\sqrt{25ac^2}$.

Quod ſi autem quantitates radicales propoſitæ, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, non habeant eandem quantitatem ſub ſigno radicali; tum fiet additio, adhibito ſigno $+$: qua ratione, quia quantitates radicales $\sqrt{12}$, & $\sqrt{18}$ reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones fiunt $2\sqrt{3}$, & $3\sqrt{2}$; erit ſumma ipſarum, vel $2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}$, vel $\sqrt{18} + \sqrt{12}$.

Sed accidit interdum, ut etſi quantitates, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocatæ, eandem habeant quantitatem ſub ſigno radicali, adhuc tamen additio fieri de-

beat, adhibito ſigno $+$: ſcilicet ſi quantitates ſint litterales, & coefficientes litteras habeant diverſas. Ut ſi ſimul addere velim quantitates duas radicales $\surd ac^2$, & $\surd ab^2$; eæ reductæ ad ſimpliciores ſuos terminos eandem continent ſub ſigno radicali quantitatem; nam evadunt $c\surd a$, & $b\surd a$. Sed quia c cum b non aliter conjungi poteſt, quàm ſigno $+$; erit ſumma earum quantitatum, vel $c\surd a + b\surd a$, vel etiam $\overline{c + b}\surd a$.

Fieri quoque poteſt additio radicalium ſimplicium ſine ulla reductione hac alia methodo, quæ commodior erit in quantitatibus numericis: capiantur quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, & dividatur major per minorem. Nam ſi contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; eliciatur radix iſta, eaque unitate aucta fiat coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno exiſtentis, & habebitur ſumma quæſita.

Oporteat, exempli gratia, addere in unum quantitates duas radicales ſimplices $\surd 8$, & $\surd 72$: capiantur quantitates ſub ſignis exiſtentes 72, & 8; dein-

de

deinde dividatur major 72 per minorem 8: & quia habetur 9 pro quotiente, cujus quadrata radix eſt 3; augeatur radix iſta unitate; & erit $4\sqrt{8}$, ſive $\sqrt{128}$ ſumma propoſitarum quantitatum.

Proponantur ſimiliter addendæ in unum quãtitates duæ radicales ſimplices $\sqrt[3]{24}$, & $\sqrt[3]{648}$: quoniam quantitates ſub ſignis exiſtentes ſunt 24, & 648; dividatur major 648 per minorem 24: quumque pro quotiente habeatur 27, cujus radix cubica eſt 3; augeatur radix iſta unitate, & erit $4\sqrt[3]{24}$, ſive $\sqrt[3]{1536}$ ſumma datarum quantitatum.

Quod ſi autem diviſa majori per minorem, non habeatur talis quotiens, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; tunc facienda eſt additio, adhibito ſigno †: qua ratione, quia ex quotiente, qui oritur dividendo 12 per 8 elici nequit quadrata radix; idcirco ſumma duarum quantitatum radicalium $\sqrt{8}$, & $\sqrt{12}$ erit $\sqrt{8}$ † $\sqrt{12}$.

Jam ſi quantitati radicali addenda ſit quantitas aliqua commenſurabilis, ac rationalis, fiet additio conjungendo eas ſigno †. Sic ad addendum 5 cum $\sqrt{14}$, ſcribo 5 † $\sqrt{14}$; pariterque ad addendum 3 cum $\sqrt[3]{10}$, ſcribo 3 † $\sqrt[3]{10}$: neque

que aliter fiet, ſi addi debeat, vel b cum $\surd a$, vel b cum $\surd 3\ a$; quandoquidem ſumma erit, vel $b + \surd a$, vel $b + \surd 3\ a$.

II.

Subtractio radicalium ſimplicium.

Similiter, ut ex una quantitate radicali ſubtrahi poſſit alia quantitas radicalis; reducendæ ſunt eæ methodo ſuperiùs tradita ad ſimpliciores ſuas expreſsiones. Nam ſi contigerit, eas ſic reductas eandem ſub ſigno radicali quantitatem habere, fiet ſubtractio, ſubducendo coefficientem unius ex coefficiente alterius, & ſcribendo reſiduum velut coefficientem ejuſdem quantitatis radicalis.

Hoc pacto, ſi ex quantitate radicali $\surd 72$ ſubducenda ſit quantitas altera radicalis $\surd 8$; reduco primùm eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, earumque una fiet $6\surd 2$, altera $2\surd 2$: unde quia ſic reductæ eandem ſub ſigno radicali habent quantitatem, ex coefficiente unius 6 ſubtraho coefficientem alterius 2, eritque reſiduum quæſitum $4\surd 2$, ſive $\surd 32$.

Eadem ratione, ſi ex quantitate radicali

cali $\sqrt[3]{648}$ proponatur ſubtrahenda quantitas altera radicalis $\sqrt[3]{24}$; reduco primùm illas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones: & quia earum una fit $6\sqrt[3]{3}$, altera $2\sqrt[3]{3}$, erit reſiduum quæſitum $4\sqrt[3]{3}$, ſive $\sqrt[3]{192}$. Atque ita quoque id, quod remanet, ſubtrahendo $\sqrt{9a}$ ex $\sqrt{25a}$, erit $2\sqrt{a}$, ſive $\sqrt{4a}$; pariterque erit $c\sqrt{a}$, ſive $\sqrt{ac^2}$ id, quod remanet, ſubducendo $\sqrt{4ac^2}$ ex $\sqrt{9ac^2}$.

Quod ſi verò quantitates, ad ſubtrahendum propoſitæ, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, non habeant ſub ſigno radicali eandem quantitatem; tunc fiet ſubtractio, adhibito ſigno $-$: qua ratione, quia quantitates radicales $\sqrt{18}$, & $\sqrt{12}$, reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiunt $3\sqrt{2}$, & $2\sqrt{3}$; erit vel $3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$, vel $\sqrt{18} - \sqrt{12}$ id, quod relinquitur, ſubtrahendo unam ex alia.

Sed contingit ut plurimum, ut tametſi quantitates, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocatæ, eandem habeant quantitatem ſub ſigno radicali, adhuc tamen ſubtractio fieri debeat, adhibito ſigno $-$: nimirum ſi quantitates ſint litterales, & coefficientes litteras habeant diverſas. Ut ſi velim ex $\sqrt{ac^2}$ ſubtrahere $\sqrt{ab^2}$, eæ reductæ ad ſimpliciores ſuos termi-

minos eandem ſub ſigno radicali continent quantitatem; nam evadunt $c\sqrt{a}$, & $b\sqrt{a}$. Sed quia b ex c non aliter ſubtrahi poteſt, quàm per ſignum —; erit reſiduum propoſitæ ſubtractionis, vel $c\sqrt{a} - b\sqrt{a}$, vel etiam $\overline{c - b}\sqrt{a}$.

Fieri quoq; poteſt ſubtractio radicaliũ ſimplicium ſine ulla reductione hac alia methodo, quæ commodior erit in quantitatibus numericis: capiantur quantitates, ſub ſignis radicalibus exiſtentes, & dividatur major per minorem. Nam ſi contigerit, ex hac diviſione talem oriri quotientem, ut exinde elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit; fiat radix iſta, unitate diminuta, coefficiens quantitatis minoris, ſub ſigno ſuo exiſtentis, & habebitur reſiduum quæſitum.

Oporteat, exempli gratia, ex quantitate radicali $\sqrt{72}$ ſubducere quantitatem aliam radicalem $\sqrt{8}$: capiantur quantitates ſub ſignis exiſtentes 72, & 8; deinde dividatur major 72 per minorem 8: & quia habetur 9 pro quotiente, cujus quadrata radix eſt 3; minuatur radix iſta unitate, & erit $2\sqrt{8}$, ſive $\sqrt{32}$ reſiduum propoſitæ ſubtractionis.

Oporteat ſimiliter, ex quantitate radicali

cali $\surd^3$ 648 ſubtrahere quantitatem alteram radicalem $\surd^3$ 24 : quoniam quantitates ſub ſignis exiſtentes ſunt 648 , & 24 ; dividatur major 648 per minorem 24 : quumque pro quotiente habeatur 27 , cujus radix cubica eſt 3 ; minuatur radix iſta unitate , & erit $2\surd^3$ 24 , ſive $\surd^3$ 192 reſiduum ſubtractionis propoſitæ .

Quod ſi verò diviſa majori per minorem, non habeatur talis quotiens , ut elici exinde poſſit radix , quam oſtendit ſignum radicale ; tunc facienda eſt ſubtractio , adhibito ſigno — : qua ratione , quia ex quotiente , qui oritur , dividendo 12 per 8 , elici nequit quadrata radix; erit $\surd 12 - \surd 8$ id , quod remanet, ſubducendo $\surd 8$ ex $\surd 12$.

Jam ſi ex quantitate commenſurabili ſubducenda ſit quantitas radicalis , vel viciſſim ex quantitate radicali ſubducenda ſit quantitas commenſurabilis ; fiet ſubtractio , conjungendo eas ita quidem ſigno — , ut ſignum iſtud præcedat quantitatem ſubtrahendam . Sic ad ſubtrahendum $\surd 14$ ex 5 , ſcribo $5 - \surd 14$; pariterque ad ſubtrahendum 3 ex $\surd^3$ 50, ſcribo $\surd^3 50 - 3$: neque aliter fiet,ſi ſubtrahi , debeat vel $\surd a$ ex b , vel viciſſim

b ex

b ex $\sqrt{a}$; nam erit reſiduum, vel $b - \sqrt{a}$, vel $\sqrt{a} - b$.

III.

Multiplicatio radicalium ſimplicium.

UT quantitates ſimplices radicales per ſe mutuò multiplicentur, nulla opus eſt earum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione, ſed ſatis eſt quantitates, ſub ſignis exiſtentes, inter ſe mutuò multiplicare, productoque idem radicale ſignum præfigere. Ut ſi oporteat $\sqrt{a}$ multiplicare per $\sqrt{b}$, multiplico primùm a per b, tum producto ab præfigo idem ſignum radicale, & quantitas radicalis $\sqrt{ab}$ erit productum quæſitum; ſimiliter productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{2}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{10}$; atque ita quoque erit $\sqrt[3]{30}$ id, quod producitur, multiplicando $\sqrt[3]{3}$ per $\sqrt[3]{10}$.

Quod ſi quantitates radicales, ad multiplicandum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes, neceſſe eſt eos quoque inter ſe mutuò multiplicare: qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $2\sqrt{a}$ per $3\sqrt{b}$, erit $6\sqrt{ab}$; pariterque id, quod producitur, multiplicando $3\sqrt{5}$ per

$4\sqrt{10}$

$4\sqrt{10}$ erit $12\sqrt{50}$; atque ita quoque erit $ac\sqrt{ab}$ productum, quod gignitur, multiplicando $a\sqrt{a}$ per $c\sqrt{b}$.

Jam autem productum, quod oritur ex mutua quantitatum radicalium multiplicatione, non ſemper eſt quantitas alia radicalis; ſed fieri poteſt, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: ſcilicet, ſi quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò multiplicatæ, producant quantitatem, ex qua elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Id namque quum accidit, eliciatur prædicta radix, eaque per coefficientes quantitatum propoſitarum multiplicata, productum quæſitum exhibebit,

Hoc pacto ſi multiplicare oporteat $2\sqrt{ab^2}$ per $4\sqrt{a}$; multiplico primum inter ſe mutuò quantitates ſub ſignis exiſtentes ab^2, & a; deinde, quia ex hac multiplicatione productum oritur a^2b^2, cujus quadrata radix eſt ab, multiplico radicem iſtam per coefficientes propoſitarum quantitatum, hoc eſt primò per 2, deinde per 4; & erit $8ab$ productum, quod gignitur, multiplicando $2\sqrt{ab^2}$ per $4\sqrt{a}$.

Eâdem ratione ad multiplicandum $2\sqrt{3}\ a^2$ per $3\sqrt{3}\ a$; multiplico primum

quantitates, ſub ſignis exiſtentes : & quoniã ex hac multiplicatione producitur a^3, cujus radix cubica eſt a, multiplico deinde per coefficientes propoſitarum quantitatum 2, & 3 radicem iſtam a ; eritque $6a$ productum, quod quæritur. Atque ita quoque erit 24 productum, quod oritur, multiplicando $3\surd 8$ per $2\surd 2$; & 12 id, quod producitur, multiplicando $3\surd^3 4$ per $2\surd^3 2$.

Quo pacto quantitas radicalis multiplicari debeat per quantitatem aliam commenſurabilem, ac rationalem ; jam ſuperiùs innuimus : nimirum ſcribendo primam poſt ſecundam, nullo ſigno interjecto. Hac ratione ad multiplicandum $\surd a$ per c, ſcribo $c\surd a$; pariterque ad multiplicandum $\surd^3 b$ per a, ſcribo $a\surd^3 b$. Atque ita quoque erit $5\surd 2$ productum, quod oritur, multiplicando $\surd 2$ per 5 ; & $4\surd^3 10$ id, quod producitur, multiplicando $\surd^3 10$ per 4.

Sed ſi quantitas radicalis, quam oportet per aliam commenſurabilem, ac rationalem multiplicare, ſuum habeat coefficientem; multiplicandus eſt iſte per quantitatem commenſurabilem. Quo pacto erit $ac\surd a$ productum, quod oritur, multiplicando $a\surd a$ per c ; & $ba\surd^3 b$ productum, quod

quod gignitur, multiplicando $b\sqrt{3}\ b$ per a. Atque ita quoque erit $20\sqrt{2}$ id, quod producitur, multiplicando $4\sqrt{2}$ per 5; & $12\sqrt{3}\ 4$ id, quod oritur, multiplicando $3\sqrt{3}\ 4$ per 4.

IV.

Diviſio radicalium ſimplicium.

Similiter, ut quantitates ſimplices radicales per ſe mutuò dividantur, haud quidem opus eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; ſed ſufficiet quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò dividere, & quotienti idem radicale ſignum præfigere. Ut ſi oporteat $\sqrt{ab}$ dividere per $\sqrt{a}$, divido primùm ab per a, tum quotienti b præfigo idem ſignum radicale, & quantitas radicalis $\sqrt{b}$ erit quotiens quæſitus; pariterque quotiens, qui oritur, dividendo $\sqrt{10}$ per $\sqrt{5}$, erit $\sqrt{2}$; atque ita quoque erit $\sqrt{3}\ c$ quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{3}\ c^2$ per $\sqrt{3}\ c$; & $\sqrt{3}\ 3$ quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{3}\ 30$ per $\sqrt{3}\ 10$.

Quod ſi quantitates radicales, ad dividendum propoſitæ, ſuos habeant coefficientes; neceſſe eſt, eos quoque per ſe mu-

tuò dividere : qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo $6\sqrt{ab}$ per $2\sqrt{a}$, erit $3\sqrt{b}$; pariterque quotiens, qui producitur, dividendo $12\sqrt{50}$ per $4\sqrt{10}$, erit $3\sqrt{5}$; atque ita quoque erit $a\sqrt{a}$ quotiens, qui gignitur, dividendo $ac\sqrt{ab}$ per $c\sqrt{b}$.

Jam autem quotiens, qui oritur ex mutua quantitatum radicalium diviſione, non ſemper eſt quantitas alia radicalis; ſed fieri poteſt, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: ſcilicet, ſi quantitates, ſub ſignis exiſtentes, per ſe mutuò diviſæ, producant quotientem, ex quo elici poſſit radix, quam radicale ſignum oſtendit. Id namque ſi contingit, eliciatur prædicta radix, eaque multiplicata per quotientem, qui oritur ex mutua coefficientium diviſione, quæſitum quotientem exhibebit.

Hac ratione, ſi dividere oporteat $8\sqrt{ab^2}$ per $2\sqrt{a}$, divido primùm per ſe mutuò quantitates, ſub ſignis exiſtentes, hoc eſt ab^2 per a; deinde, quia ex hac diviſione quotiens oritur b^2, cujus quadrata radix eſt b, multiplico radicem iſtam per 4 quotientem, qui oritur, dividendo coefficientem unius quantitatis radicalis 8 per coefficientem alterius 2: quumque ſic multiplicata evadat $4b$, erit

erit $4b$ quotiens, qui gignitur, dividendo $8\sqrt{ab^2}$ per $2\sqrt{a}$.

Eâdem ratione ad dividendum $6\sqrt[3]{ab^3}$ per $2\sqrt[3]{a}$, divido primum quantitates, ſub ſignis exiſtentes, hoc eſt ab^3 per a: & quoniam ex hac diviſione producitur quotiens b^3, cujus radix cubica eſt b; multiplico deinde b per 3, quotientem genitum ex diviſione coefficientis unius quantitatis radicalis 6 per coefficientem alterius 2; eritque $3b$ quotiens quæſitus. Atque ita quoque erit 9 quotiens, qui oritur, dividendo $6\sqrt{18}$ per $2\sqrt{2}$; & 8 quotiens, qui gignitur, dividendo $4\sqrt[3]{16}$ per $\sqrt[3]{2}$.

Quod ſi diviſio inſtitui debeat inter quantitatem radicalem, & quantitatẽ aliã commenſurabilem, ac rationalem; attollatur quantitas commenſurabilis ad eam poteſtatem, quam oſtendit radicale ſignum alterius; tum deinde fiat diviſio. Ut ſi dividere velim $\sqrt{ab^2}$ per b, divido ab^2 per quadratum ipſius b, hoc eſt per b^2; eritque $\sqrt{a}$ quotiens quæſitus. Pariterque ſi dividere oporteat a per $\sqrt[3]{a}$, divido cubum ipſius a per quantitatem, exiſtentem ſub ſigno radicali, hoc eſt a^3 per a, eritque $\sqrt[3]{a^2}$ quo-

tiens propoſitæ diviſionis.

Cæterùm notetur hoc loco velim, quod ſi ex diviſione quantitatum radicalium oriatur fractio aliqua, ex qua elici non poſſit radix, de qua agitur; tunc radicale ſignum, vel præfigendum toti fractioni ad modum unius, vel etiam tam numeratori, quàm denominatori: qua ratione quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{ab}$ per $\sqrt{c}$, erit vel $\sqrt{\frac{ab}{c}}$, vel etiam $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{c}}$; & ſimiliter quotiens, qui gignitur, dividendo $\sqrt{5}$ per $\sqrt{6}$ erit, vel $\sqrt{\frac{5}{6}}$, vel etiam $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Sed ſi ex numeratore, denominatoreve fractionis elici poſſit radix, de qua agitur, non item ex alio; tunc ex quo extrahi poteſt radix illa, extrahatur; ex quo vero extrahi non poteſt, ei radicale ſignum præfigatur. Ita quia dividendo a^2b per cb, oritur fractio $\frac{a^2}{c}$, ex cujus numeratore a^2 elici poteſt quadrata radix: proinde, ſi dividere oporteat $\sqrt{a^2b}$ per

$\sqrt{cb}$

$\sqrt{cb}$ quotiens erit $\frac{a}{\sqrt{c}}$; atque ita quoque erit $\frac{\sqrt{bd}}{c}$ quotiens, qui producitur, dividendo $\sqrt{abd}$ per $\sqrt{ac^2}$.

V.

Formatio poteſtatum in radicalibus ſimplicibus.

Quemadmodum nulla eſt opus reductione, quum quantitates ſimplices radicales per ſe mutuò multiplicantur, aut dividuntur; ita neque etiam ulla requiritur reductio, quotieſcumque quantitates radicales ad datam quamcumque poteſtatem ſunt elevandæ; quum ſatis ſit, ad poteſtatem illam attollere quantitates ipſas, ſub ſignis exiſtentes, iiſdemque idem radicale ſignum præfigere. Ita ſi oporteat, ad quadratum attollere quantitatem radicalem $\sqrt[3]{a}$; fiat primò quadratum ex a, tum huic præfigatur idem ſignum radicale, & erit $\sqrt[3]{a^2}$ id, quod quæritur. Atque ita quoque quantitas radicalis $\sqrt{a}$, ad cubum elevata, erit $\sqrt{a^3}$.

Quod ſi quantitates radicales, quæ ad datam quamcumque poteſtatem debent elevari, habeant ſuos coefficientes; neceſſe eſt, eos quoque ad datam illam poteſtatem attollere. Qua ratione quadratum ex $2\sqrt[3]{a}$ erit $4\sqrt[3]{a^2}$; & cubus ex $2\sqrt{a}$ erit $8\sqrt{a^3}$. Atque ita quoque quadratum ex $3\sqrt[3]{5}$ erit $9\sqrt[3]{25}$; & cubus ex $2\sqrt{4}$ erit $8\sqrt{64}$.

Sed hoc loco illud etiam notare oportet, poteſtatem, ad quam attollitur quantitas aliqua radicalis, non eſſe ſemper quantitatem aliam radicalem; ſed fieri poſſe, ut quandoque ſit quantitas commenſurabilis, ac rationalis: veluti ſi poteſtas, ad quam elevanda eſt quantitas radicalis, ſit illa eadem, quam radicale ſignum oſtendit. Tunc enim ipſa quantitas, ſub ſigno exiſtens, per quæſitam coefficientis poteſtatem multiplicata, id quod quæritur exhibebit.

Hoc pacto, ſi ad quadratum ſit elevanda quantitas radicalis $c\sqrt{a}$, multiplico quantitatem, ſub ſigno exiſtentem, per quadratum coefficientis, hoc eſt a per c^2, & erit ac^2 quadratum quæſitum. Similiter ſi ad cubum debeat elevari quantitas radicalis $2\sqrt[3]{a}$, multiplico quantitatem, ſub ſigno exiſtentem, per cubum coeffi-

cien-

cientis, hoc eſt a per 8, & erit $8a$ cubus quæſitus. Atque ita quoque quantitas radicalis $2\sqrt{a}$, ad quadratum elevata, erit $4a$.

Cæterùm quantitates ſimplices radicales multò faciliùs ad quamcumque datam poteſtatem elevabuntur, ſi conſiderentur illæ, velut poteſtates imperfectæ; quandoquidem per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſatis erit exponentes ipſarum duplicare, ſi elevandæ ſint ad quadratum, ſeu ſecundam poteſtatem; triplicare, ſi ad cubum, ſeu tertiam poteſtatem; quadruplicare, ſi ad quadrato-quadratum, ſeu quartam poteſtatem; atque ita deinceps.

Ita ſi oporteat, ad cubum elevare quantitatem radicalem $\sqrt{a}$, quia conſiderata illa, velut poteſtate imperfecta, exprimitur in hunc modum $a^{\frac{1}{2}}$, triplico exponentem ejus, & erit cubus quæſitus $a^{\frac{3}{2}}$, hoc eſt $\sqrt{a^3}$. Similiter quia $\sqrt[3]{a^2}$ eſt idem, ac $a^{\frac{2}{3}}$, duplicato exponente ejus, fiet $a^{\frac{4}{3}}$, hoc eſt $\sqrt[3]{a^4}$ quadratum illius. Atque

que ita quoque erit $a^{\frac{8}{3}}$, ſive $\sqrt[3]{a^8}$ quadrato-quadratum quantitatis radicalis $\sqrt[3]{a^2}$, quæ exprimitur etiam in hunc modum $a^{\frac{2}{3}}$; & $a^{\frac{5}{3}}$, ſive $\sqrt[3]{a^5}$ quadrato-cubus quantitatis radicalis $\sqrt[3]{a}$, quæ deſignatur etiam hac ratione $a^{\frac{1}{3}}$.

VI.
Extractio radicum ex radicalibus ſimplicibus.

AD extrahendas radices ex radicalibus ſimplicibus neque etiam neceſſe eſt, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; quum ſufficiat, illas extrahere ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, iiſque idem radicale ſignum præfigere. Ita ſi oporteat, quadratam radicem extrahere ex $\sqrt[3]{a^2}$, eliciatur primò quadrata radix ex quantitate, ſub ſigno exiſtente a^2, tum huic præfigatur idem ſignum radicale, & erit $\sqrt[3]{a}$ radix quadrata quæſita. Atque ita quoque radix cubica quantitatis radicalis $\sqrt{a^3}$ erit $\sqrt{a}$.

Sed ſi quantitates radicales, ex quibus radix quæcumque extrahi debet, ſuos ha-

habeant coefficiẽtes;neceſſe eſt,ex iis quoque quadratam radicem extrahere:qua ratione quadrata radix quantitatis radicalis $9\sqrt{3}\, a^2$ erit $3\sqrt{3}\, a$; radix cubica quantitatis radicalis $8\sqrt{a^3}$ erit $2\sqrt{a}$; pariterque erit $2\sqrt{3}\, 2$ radix quadrato-quadrata quantitatis radicalis $16\sqrt{3}\, 16$.

Jam ſi ſub ſigno talis exiſtat quantitas, ut exinde elici nequeat radix , de qua agitur ; tum , ut melius intelligatur, quo pacto extrahenda ſit quæſita radix , præſtat, quantitatem ipſam radicalem,velut poteſtatem imperfectam , conſiderare. Nam per ea , quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſemiſſis ſui exponentis dabit exponentem radicis quadratæ , triens exponentem radicis cubicæ , quadrans exponentem radicis quadrato-quadratæ , atque ita deinceps.

Ita ex quantitate radicali $\sqrt{3}\, a$ extrahi nequit methodo ſuperiùs tradita quadrata radix : quocirca ad illam extrahendã conſidero quantitatem radicalem $\sqrt{3}\, a$, velut poteſtatem imperfectam:& quia hoc pacto conſiderata , exprimitur in hunc modum

$a^{\frac{1}{3}}$, ſumo ſemiſſem ſui exponentis ,

& erit $a^{\frac{1}{6}}$, ſive $\sqrt{6}\, a$ radix quadrata quæſita.

ſita. Atque ita quoque, quia $\sqrt{a}$ eſt idem, ac $a^{\frac{1}{2}}$; erit $a^{\frac{1}{4}}$, ſive $\sqrt[4]{a}$ radix quadrata quantitatis radicalis $\sqrt{a}$.

Ex quo patet, quod quotieſcumque ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi nequit radix, de qua agitur, multiplicari debeat exponens ſigni radicalis per exponentem quæſitæ radicis. Sic ad extrahendam radicem quadratam ex quantitate radicali $\sqrt[3]{a}$, multiplico 3 exponentem ſui ſigni radicalis per 2 exponentem quæſitæ radicis, & erit $\sqrt[6]{a}$ radix quæſita. Pariterque ad extrahendam radicem cubicam ex quantitate radicali $\sqrt{a}$, multiplico 2 exponentem ſui ſigni radicalis per 3 exponentem radicis quæſitæ, & fiet $\sqrt[6]{a}$ radix cubica, quam oportet invenire.

Quod ſi quantitates radicales ſuos habeant coefficientes, & ex iis extrahi nequeat quæſita radix; tum meliùs erit, coefficientes quoque ſub ſignis radicalibus reponere, & radicem methodo mox tradita ex quãtitatibus illis extrahere. Ita quia ex coefficiente quantitatis radicalis $3\sqrt{2}$ extrahi nequit radix cubica, proinde repono illum ſub ſigno radicali, & erit $\sqrt[6]{18}$ radix cubica quæſita.

Cæte-

Cæterùm quæcumque radix extrahenda proponatur ex quantitate aliqua radicali, ſemper radix illa erit quantitas altera radicalis, nec unquam eſſe poterit commenſurabilis, ac rationalis. Nam ut talis exiſtat, neceſſe eſt, ut extracta ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, radice quæſita, talis oriatur quantitas, ut exinde extrahi quoque poſſit radix, à ſigno radicali denominata: quod profectò quum contingit, iam ab initio ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, extrahi poterat radix, quam radicale ſignum oſtendit; nec proinde erat quantitas incommenſurabilis, ac radicalis.

VII.

Reductio radicalium ſimplicium ad eandem denominationem.

IN calculo radicalium ſimplicium illud ſemper ſuppoſuimus, quod quantitates radicales inter ſe mutuò addendæ, ſubtrahendæ, multiplicandæ, aut dividendæ ſint ejuſdem denominationis, ſive idem habeant ſignum radicale: unde quia ſæpe ſæpiùs occurrit, ut operationes iſtæ inſtitui debeant inter radicales diverſæ ſpeciei, ſive denominationis; proinde prius

priùs quàm ad alia ſermonem convertamus, non abs re erit, hìc breviter oſtendere, quo pacto radicales diverſi nominis poſſint ad eandem denominationem revocari.

Verũtamen, ut melius intelligatur, quo demum artificio radicales diverſi nominis ad eandem denominationem revocentur, conducit plurimum, quantitates ipſas radicales, velut poteſtates imperfectas, conſiderare. Sic enim ſatis erit, ad eandem denominationem reducere fractiones, quæ ſunt exponentes earum poteſtatum; quum hac ratione, propter communem eorum exponentium denominatorem, eadem quoque erit quantitatum radicalium denominatio.

Ita ſi, exempli gratia, ad eandem denominationem ſint reducendæ quantitates duæ radicales $\sqrt{a}$, & $\sqrt[3]{b}$, conſidero illas, velut poteſtates imperfectas: & quia tali pacto conſideratæ, exprimuntur in hunc modum $a^{\frac{1}{2}}$, & $b^{\frac{1}{3}}$; reduco ad eandem denominationem fractiones duas $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$, quæ ſunt exponentes earum poteſtatum: & quoniam eæ ſic reductæ

ctæ fiunt $\frac{3}{6}$, & $\frac{2}{6}$; erunt $a^{\frac{3}{6}}$, & $b^{\frac{2}{6}}$; hoc eſt $\sqrt{6}\cdot a^3$, & $\sqrt{6}\, b^2$ quantitates radicales propoſitæ, reductæ ad eandem denominationem.

Ex quo patet, ad reducendas radicales duas ad eandem denominationem, primò quidem elevandam eſſe quantitatem, ſub cujuſque ſigno exiſtentem, ad poteſtatem à ſigno alterius denominatorem; tum proprium cujuſque ſigni indicem multiplicandum eſſe per indicem alterius. Nam in adducto exemplo radicalis $\sqrt{a}$ abiit in $\sqrt{6}\, a^3$, & radicalis $\sqrt{3}\, b$ verſa eſt in $\sqrt{6}\, b^2$: in quibus clarè liquet quantitatem, ſub cujuſque ſigno exiſtentem, elevatam eſſe ad poteſtatem, denominatam à ſigno alterius; & proprium indicem cujuſque ſigni per indicem alterius eſſe multiplicatum.

Sed quemadmodum in reductione fractionum ad eandem denominationem, ut ſimplicioribus quantum fieri poteſt terminis habeantur expreſſæ, præſtat priùs inquirere, num denominator unius exactè contineatur in denominatore alterius; quum ſi id contingat, ſufficiat illius tam numeratorem, quàm denominato-

rem

rem multiplicare per numerum, qui oſtendit, quoties denominator unus alterum continet: ita quoque in reductione radicalium ad idem nomen, non abs re erit, aliquid non diſſimile priùs inquirere.

Nimirum quæratur primò, num index ſigni unius quantitatis radicalis contineatur exactè in indice ſigni alterius quantitatis. Id namque ſi contingat, elevetur ſola illa quantitas radicalis ad poteſtatem, denominatam à numero, qui oſtendit, quoties unus index in altero continetur, & per hunc eundem numerũ multiplicetur index ſigni ejuſdem quantitatis. Nam hac ratione jam idem erit ſignum utriuſque quantitatis radicalis, nec altera quantitas à ſede ſua mutabitur.

Ut ſi velim, ad eandem denominationem reducere quantitates duas radicales $\surd c$, & $\surd^6 a$; quia index illius 2 continetur ter in indice iſtius 6, multiplico indicem illum per 3, & elevata quantitate c ad poteſtatem, cujus index ſit etiam 3, erunt $\surd^6 c^3$, & $\surd^6 a$ quantitates illæ radicales, ad eandem denominationẽ reductæ; atque ita quoque quantitates duæ radicales $\surd^3 a$, & $\surd^6 c$, reductæ ad eandem denominationem, erunt $\surd^6 a^2$, & $\surd^6 c$.

CAP.

CAP. VIII.

Calculus radicalium compoſitarum.

Quantitates incommenſurabiles, ſive radicales dicuntur compoſitæ, quum duos, aut plures terminos habent, affectos ſigno radicali, ut $\sqrt{a} + \sqrt{c}$, vel $\sqrt{a} - \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Unde ſicuti commenſurabiles compoſitæ oriuntur ex additione, & ſubtractione commenſurabilium ſimplicium; ita quoque ex additione, & ſubtractione radicalium ſimplicium naſcuntur radicales compoſitæ.

Jam, qui rite perceperit calculum radicalium ſimplicium, facili quoque negotio & calculum radicalium compoſitarum intelliget. Hinc monitum Lectorem velim, ut niſi prius promptitudinem, & facilitatem quandam in calculo radicalium ſimplicium acquirat, ad compoſitarum calculum nequaquam ſe conferat: nam oleum, & operam perdit, qui ſimplicioribus, & facilioribus non rite intellectis ad ea, quæ ſunt magis compoſita, ac difficilia, animum convertit.

In harum porro quantitatum calculo expediendo illud etiam aſſumemus, ut

quantitates, in quibus operationes ſunt inſtituendæ, ex ejuſdem ſpeciei radicalibus conſtent. Quocirca ſi quantitates offerantur, quæ radicalibus conſtent diverſæ ſpeciei; eæ per regulam, in calce capitis antecedentis traditam, mutandæ ſunt in alias, quarum radicales omnes eandem habeant denominationem.

I.

Additio radicalium compoſitarum.

Radicalium compoſitarum additio ſic commodè poterit inſtitui: reducantur primò ſingulæ cujuſque quantitatis addendæ partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones; deinde conjungantur ſimul iiſdem omnino ſignis, quibus afficiuntur: & ſiquidem plures occurrant partes, quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, iiſdem ſignis ſint affectæ, addantur earum coefficientes in unum; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantitatem, ſed ſigna ſint contraria, earundem coefficientes à ſe mutuò ſubtrahantur.

Ita ſi quantitati $\sqrt{12a} - \sqrt{8b}$ addenda ſit quantitas $\sqrt{27a} + \sqrt{50b}$, ſumma erit

erit $\sqrt{75a} + \sqrt{18b}$. Nam reductis ſingulis partibus primæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiet illa $2\sqrt{3a} - 2\sqrt{2b}$; & ſimiliter reductis ad ſimpliciores ſuos terminos ſingulis ſecundæ partibus, evadet ea $3\sqrt{3a} + 5\sqrt{2b}$. Quare ſumma utriuſque quantitatis erit $2\sqrt{3a} - 2\sqrt{2b} + 3\sqrt{3a} + 5\sqrt{2b}$. Jam verò $2\sqrt{3a} + 3\sqrt{3a}$ idem ſunt; ac $5\sqrt{3a}$; & $- 2\sqrt{2b} + 5\sqrt{2b}$ ſunt idem, ac $+ 3\sqrt{2b}$. Itaque eadem ſumma erit ſimpliciùs $5\sqrt{3a} + 3\sqrt{2b}$, hoc eſt $\sqrt{75a} + \sqrt{18b}$.

Eadem ratione ſumma, quæ oritur ex additione quantitatum $\sqrt{20a} - \sqrt{18c}$, & $\sqrt{45a} - \sqrt{32c}$, erit $\sqrt{125a} - \sqrt{98c}$. Nam ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur ſingulæ partes, tam primæ, quàm ſecundæ quantitatis; fiet una $2\sqrt{5a} - 3\sqrt{2c}$, & altera $3\sqrt{5a} - 4\sqrt{2c}$. Quare ſumma utriuſque quantitatis erit $2\sqrt{5a} - 3\sqrt{2c} + 3\sqrt{5a} - 4\sqrt{2c}$: & propterea, quia $2\sqrt{5a} + 3\sqrt{5a}$ idem ſunt, ac $5\sqrt{5a}$, & $- 3\sqrt{2c} - 4\sqrt{2c}$ ſunt idem, ac $- 7\sqrt{2c}$; erit eadem ſumma ſimpliciùs $5\sqrt{5a} - 7\sqrt{2c}$, hoc eſt $\sqrt{125a} - \sqrt{98c}$.

Quod ſi inter quantitates radicales aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales, id quod frequenter contingere ſolet; tum eæ quoque ſuis propriis ſignis

cum aliis ſunt conjungendæ ; ſed quia cum radicalibus contrahi non poſſunt, ſatis erit, quum fieri poteſt, inter ſe mutuò illas contrahere : qua ratione quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} + 3c$, addita quantitati $3a - 5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} - 5c$, dabit pro ſumma quantitatem $5a - 2\sqrt{bc} + 6\sqrt{ac} - 2c$; & ſimiliter quantitas $7\sqrt{2c} - 2\sqrt{3a} - 5c$, addita quantitati $5\sqrt{3a} - 4\sqrt{2c} + 8c$, dabit pro ſumma quantitatem $3\sqrt{2c} + 3\sqrt{3a} + 3c$.

II.

Subtractio radicalium compoſitarum.

SImiliter ſubtractio radicalium compoſitarum in hunc modum commodè poterit inſtitui : reducantur primò ſingulæ cujuſque quantitatis partes ad ſimpliciores ſuas expreſſiones ; deinde conjungantur ſimul, mutatis ſignis partibus omnibus quantitatis ſubtrahendæ: & ſiquidem hac facta conjunctione plures occurrant partes, quæ eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, iiſdem ſignis ſint affectæ, addantur earum coefficientes in unum ; quod ſi verò habeant quidem ſub ſigno radicali eandem quantita-

titatem, ſed ſigna ſint contraria, earundem coefficiētes à ſe mutuò ſubducantur.

Hoc pacto, ſi ex quantitate $\sqrt{75a} + \sqrt{18b}$ ſubtrahenda ſit quantitas $\sqrt{12a} - \sqrt{8b}$, reſiduum erit $\sqrt{27a} + \sqrt{50b}$. Nam reductis ſingulis partibus primæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiet illa $5\sqrt{3a} + 3\sqrt{2b}$; & ſimiliter reductis ad ſimpliciores ſuos terminos ſingulis ſecundæ partibus, mutabitur ea in hanc aliam $2\sqrt{3a} - 2\sqrt{2b}$. Quare, ſubtrahendo iſtam ex illa, reſiduum erit $5\sqrt{3a} + 3\sqrt{2b} - 2\sqrt{3a} + 2\sqrt{2b}$. Jam verò $5\sqrt{3a} - 2\sqrt{3a}$ idem ſunt, ac $3\sqrt{3a}$; & $+ 3\sqrt{2b} + 2\sqrt{2b}$ ſunt idem, ac $+ 5\sqrt{2b}$. Itaque idem reſiduum ſimpliciùs erit $3\sqrt{3a} + 5\sqrt{2b}$, hoc eſt $\sqrt{27a} + \sqrt{50b}$.

Eâdem ratione reſiduum, quod oritur ſubtrahendo quantitatem $\sqrt{20a} - \sqrt{18c}$ ex quantitate $\sqrt{125a} - \sqrt{98c}$, erit $\sqrt{45a} - \sqrt{32c}$. Nam ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur ſingulæ partes, tam primæ, quàm ſecundæ quantitatis, fiet una $2\sqrt{5a} - 3\sqrt{2c}$, & altera $5\sqrt{5a} - 7\sqrt{2c}$. Quare, ſubtrahēdo illam ex iſta, reſiduum erit $5\sqrt{5a} - 7\sqrt{2c} - 2\sqrt{5a} + 3\sqrt{2c}$. Unde quia $5\sqrt{5a} - 2\sqrt{5a}$ idem ſunt, ac $3\sqrt{5a}$; & $- 7\sqrt{2c} + 3\sqrt{2c}$ ſunt idem, ac $- 4\sqrt{2c}$; erit idem reſiduum ſimpliciùs

$3\sqrt{5a} - 4\sqrt{2c}$, hoc eſt $\sqrt{45a} - \sqrt{32c}$.

Quod ſi inter partes radicales quantitatis ſubtrahendæ aliæ exiſtant commenſurabiles, ac rationales, id quod non rarò ſolet evenire; tum eæ quoque, mutatis ſignis, adjungendæ ſunt partibus quantitatis, ex qua fieri debet ſubtractio; ſed quia cum radicalibus illius contrahi non poſſunt, ſatis erit eas contrahere cum aliis commenſurabilibus, ſi quæ ſint in hac altera quantitate: qua ratione quantitas $2a + 3\sqrt{bc} + 4\sqrt{ac} + 3c$, ſubtracta ex quantitate $5a - 2\sqrt{bc} + 6\sqrt{ac} - 2c$, dabit pro reſiduo quantitatem $3a - 5\sqrt{bc} + 2\sqrt{ac} - 5c$; atque ita quoque erit $7\sqrt{2c} - 2\sqrt{3a} - 5c$ reſiduum; quod oritur, ſubtrahendo quantitatem $5\sqrt{3a} - 4\sqrt{2c} + 8c$ ex quantitate altera $3\sqrt{2c} + 3\sqrt{3a} + 3c$.

III.

Multiplicatio radicalium compoſitarum.

Quantitates radicales compoſitæ multiplicantur per ſe mutuò eadem planè ratione, qua fit multiplicatio quantitatum commenſurabiliũ compoſitarũ: nimirum multiplicãdo ſingulas partes unius per ſingulas partes alterius; & ſcri-

ſcribendo producta ſigno $+$, quum quantitates ad invicem multiplicandæ iiſdem ſignis afficiuntur; & viciſſim ſigno $-$, quum contrariis ſignis ſunt affectæ.

Hac ratione ſi quantitas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ multiplicanda ſit per aliam $\sqrt{c} - \sqrt{d}$; multiplico primùm $\sqrt{a}$ per $\sqrt{c}$, eritque productum $\sqrt{ac}$; deinde multiplico $-\sqrt{b}$ per $\sqrt{c}$, & orietur exinde productum $-\sqrt{bc}$; ad hæc multiplico $\sqrt{a}$ per $-\sqrt{d}$, & producetur $-\sqrt{ad}$; denique multiplico $-\sqrt{b}$ per $-\sqrt{d}$, eritque $+\sqrt{bd}$ id, quod ex hac multiplicatione producitur: qua ratione additis in unum omnibus iſtis quantitatibus, fiet productum totius multiplicationis $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$.

Eadem methodo inſtituenda eſt etiam multiplicatio, quotieſcumque inter quantitates radicales aliæ exiſtunt commenſurabiles, ac rationales. Ut ſi velim multiplicare $a + \sqrt{ab}$ per $c - \sqrt{ac}$, multiplico primùm a per c, deinde $+\sqrt{ab}$ per c, poſtea a per $-\sqrt{ac}$, ac denique $+\sqrt{ab}$ per $-\sqrt{ac}$: qua ratione orietur productum $ac + c\sqrt{ab} - a\sqrt{ac} - a\sqrt{bc}$. Atque ita quoque productum, quod oritur, multiplicando $3 + \sqrt{8}$ per $5 - \sqrt{3}$, erit $15 + 5\sqrt{8} - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{6}$.

Quamquam autem pro multipli-

catione quantitatum radicalium haud quidem neceſſe ſit, eas ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare; attamen ut faciliùs cognoſci poſſit, quæ producta partialia, peracta multiplicatione, ſunt ſimul conjungenda, aut à ſe mutuò ſubtrahenda, præſtat quantitates omnes radicales, ante multiplicationem, ad ſimpliciores ſuos terminos reducere.

Ita ſi multiplicari debeat $\sqrt{72} - \sqrt{45}$ per $\sqrt{60} - \sqrt{24}$, productum erit $\sqrt{4320} - \sqrt{2700} - \sqrt{1728} + \sqrt{1080}$, in quo non ita facilè apparet, num partes ejus inter ſe mutuò contrahi poſſint. Sed reductis ad ſimpliciores ſuas expreſſiones ſingulis utriuſque quantitatis partibus radicalibus, quia una fit $6\sqrt{2} - 3\sqrt{5}$, altera $2\sqrt{15} - 2\sqrt{6}$, erit productum ex ipſarum multiplicatione $12\sqrt{30} - 6\sqrt{75} - 12\sqrt{12} + 6\sqrt{30}$: in quo non modò ultrò liquet, $12\sqrt{30} + 6\sqrt{30}$ idem eſſe, ac $18\sqrt{30}$; ſed facilè etiam percipitur, contrahi quoque poſſe inter ſe $-6\sqrt{75} - 12\sqrt{12}$, quum illa, ulteriùs reducta, fit $-30\sqrt{3}$, hæc $-24\sqrt{3}$: adeo ut ambæ ſimul idem valeant, ac $-54\sqrt{3}$.

Sed præſtat quoque, quantitates omnes radicales, ante multiplicationem, ad ſimpli-

pli-

pliciores ſuos terminos reducere, ut faciliùs cognoſci poſſit, quæ producta oriantur rationalia, quæve irrationalia. Ita multiplicando $\sqrt{180}$ per $\sqrt{125}$, non aliter cognoſci poteſt, num productum inde ortum $\sqrt{22500}$ ſit rationale, nec ne, quàm extrahendo radicem quadratam ex 22500. Sed reductis radicalibus illis ad ſimpliciores ſuos terminos, quia una ſit $6\sqrt{5}$, altera $5\sqrt{5}$; clare liquet, productum, quod ex earum multiplicatione oritur, rationale eſſe, quum ſit 150.

IV.

Elevatio radicalium compoſitarum ad quamcumque poteſtatem.

Similiter quantitates radicales compoſitæ elevantur ad quamcumque datam poteſtatem eadem omnino ratione, qua ad eam attolluntur quantitates compoſitæ rationales: nimirum capiendo quadrata partium, duplumque ejus, quod oritur ex mutua earum partium multiplicatione, ſi ad quadratum ſint elevandæ; vel ſumendo cubos partium, triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per ſecundam, tri-

plum-

plumque ejus, quod producitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam, ſi elevandæ ſint ad cubum; atque ita deinceps: & conſiderando quoque velut unam omnes priores partes, quotieſcumque propoſitæ quantitates ex pluribus, quàm duabus, partibus conſtant.

Hac ratione ſi quantitas radicalis compoſita, ad quadratum elevanda, ſit $\sqrt{a} + \sqrt{c}$; fiat primò quadratum ex $\sqrt{a}$, id quod erit a; deinde ſumatur duplum ejus, quod producitur multiplicando $\sqrt{a}$ per $\sqrt{c}$, id quod erit $2\sqrt{ac}$; denique fiat quadratum c ex parte altera $\sqrt{c}$: & additis in unum omnibus iſtis quantitatibus, fiet quadratum quantitatis propoſitæ $a + 2\sqrt{ac} + c$. Sed ſi ad quadratum ſit elevanda quantitas $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, quæ tribus ex partibus conſtat; fiat primò quadratum ex duabus prioribus partibus, velut una conſideratis, $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, quod erit $a + 2\sqrt{ab} + b$; tum capiatur duplum ejus, quod oritur, multiplicando eaſdem priores partes $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ per partem tertiam $\sqrt{c}$, nimirum $2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$; denique fiat quadratum c ex parte tertia $\sqrt{c}$: & additis ſimul omnibus iſtis quantitatibus, erit quadratum quantitatis propoſitæ $a + 2\sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} + c$.

Ea-

Eadem ratione, ſi quantitas radicalis compoſita, ad cubum elevanda, ſit $\sqrt{a} + \sqrt{c}$; fiat primò cubus ex $\sqrt{a}$, qui erit $\sqrt{a^3}$; tum ſumatur triplum ejus, quod oritur, multiplicando a, quadratum primæ partis $\sqrt{a}$, in partem alteram $\sqrt{c}$, nimirum $3a\sqrt{c}$; porro accipiatur triplum ejus, quod producitur, multiplicando c, quadratum alterius partis $\sqrt{c}$, in partem primam $\sqrt{a}$, ſcilicet $3c\sqrt{a}$; denique fiat cubus ex parte altera $\sqrt{c}$, qui erit $\sqrt{c^3}$: qua ratione additis in unum omnibus iſtis quãtitatibus, fiet cubus quantitatis propoſitæ $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{c} + 3c\sqrt{a} + \sqrt{c^3}$. Sed ſi ad cubum ſit elevanda quantitas $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$, quæ tribus ex partibus conſtat; conſiderentur duæ priores velut una, & ſumptis iiſdem quantitatibus, prodibit cubus quæſitus $\sqrt{a^3} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + \sqrt{b^3} + 3a\sqrt{c} + 6\sqrt{abc} + 3b\sqrt{c} + 3c\sqrt{a} + 3c\sqrt{b} + \sqrt{c^3}$.

Etſi autem in exemplis adductis ſigna quantitatum radicalium aſſumpta fuerint quadrata; eadem tamen erit operandi ratio, ſi ſigna fuerint cubica, aut alterius cujuſcũque ſpeciei. Ita ſi ad quadratum ſit elevanda quantitas radicalis compoſita $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$, fiat quoque quadratum, tam ex $\sqrt[3]{a}$, quàm ex $\sqrt[3]{c}$, capiaturque etiam duplum ejus, quod ex

ea-

earum partium multiplicatione producitur; & erit $\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{c^2}$ quadratum quæſitum. Similiter ſi ad cubum oporteat attollere eandem quantitatem radicalem $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{c}$; fiat etiam cubus, tam ex $\sqrt[3]{a}$, quàm ex $\sqrt[3]{c}$; capiaturque adhuc, tum triplum ejus, quod producitur, multiplicando quadratum primæ partis per ſecundam, cum triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam; & erit $a + 3\sqrt[3]{a^2c} + 3\sqrt[3]{ac^2} + c$ cubus, qui quæritur.

Interim, etſi eadem ſit operandi ratio, quodcumque ſignum habeant quantitates radicales; illud tamen hìc velim obſervetur, quod quotieſcumque ſigna quantitatum radicalium eoſdem habent indices cum poteſtate, ad quam illæ ſunt elevandæ, tot ſemper termini neceſſariò oriantur rationales, quot ſunt partes in quantitatibus propoſitis. Ita quadratum ex $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ eſt $a + 2\sqrt{ab} + b$, ubi duo ſunt termini rationales; & ſimiliter quadratum ex $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$ eſt $a + 2\sqrt{ab} + b + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} + c$, ubi tres occurrunt termini rationales. Atque ita quoque cubus ex $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ eſt $a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b$, qui duos rationales terminos continet; pariterque cubus ex

$\sqrt[3]{a}$

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ eſt $a + 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} + b + 3\sqrt[3]{a^2c} + 6\sqrt[3]{abc} + 3\sqrt[3]{b^2c} + 3\sqrt[3]{ac^2} + 3\sqrt[3]{bc^2} + c$, in quo tres exiſtunt termini rationales.

V.

Præparatio ad diviſionem radicalium compoſitarum.

UT diviſio radicalium compoſitarum commodè peragi queat, tradenda priùs eſt methodus, qua inveniri poſſit quantitas contraria cuiuſcumque datæ radicalis. Voco autem datæ alicujus radicalis contrariam quantitatem, quæ talis eſt, ut ſi per eam data quantitas radicalis multiplicetur, id, quod producitur, ſit quantitas alia commenſurabilis, ac rationalis. Sic quantitatis radicalis $\sqrt[3]{a}$ erit $\sqrt[3]{a^2}$ quantitas contraria; quia ſi duæ iſtæ quantitates multiplicentur per ſe mutuo, prodibit quantitas rationalis a. Et ſimiliter quantitatis radicalis $\sqrt{a} + \sqrt{c}$ erit $\sqrt{a} - \sqrt{c}$ quantitas contraria; quia id, quod producitur ex mutua iſtarum quantitatum multiplicatione, eſt $a - c$.

Jam quum data quantitas radicalis eſt ſim-

ſimplex, facile erit ejus quantitatem contrariam invenire. Elevetur ſiquidem data quantitas ad poteſtatem, cujus index ſit unitate una minor indice ſigni radicalis; & erit poteſtas iſta quantitas contraria quæſita. Qua ratione ſi $\sqrt{a}$ ſit data quantitas radicalis, erit ejus quantitas contraria ipſamet quantitas data $\sqrt{a}$; quippe, propter indicem ſigni radicalis 2, elevanda eſt ad poteſtatem, cujus index ſit 1. Sed ſi data quantitas radicalis ſit $\sqrt[3]{a}$, erit ejus quantitas contraria $\sqrt[3]{a^2}$; quandoquidem, propter indicem ſigni radicalis 3, elevanda eſt quantitas data $\sqrt[3]{a}$ ad poteſtatem, cujus index ſit 2; hoc eſt ad poteſtatem ſecundam, ſive quadratum.

Hujus regulæ ratio eſt adeo clara, ut crediderim Lectori moleſtiam afferre, ſi vel ſaltem indicare eam hìc vellem. Tantùm notabo, quantitatem contrariam, quæ per hanc regulam invenitur, contrahi quãdoque poſſe: ſcilicet quum quantitas radicalis data ad poteſtatem aliquam elevata ſub ſigno reperitur. Ita ſi radicalis data ſit $\sqrt[3]{a^2}$, & quæratur ejus quantitas contraria, ea per regulam traditam erit $\sqrt[3]{a^4}$; ſed perſpicuum eſt, poſſe etiam hoc munere fungi quãtitatem $\sqrt[3]{a}$. Quocirca

circa, ut quantitas contraria, quantum poteſt, ſimplicior habeatur; contrahi ea poterit, dividendo quantitatem, ſub ſigno exiſtentem, per maximam poteſtatem, à ſigno denominatam, quæ in illa continetur.

Quod ſi data quantitas radicalis ſit compoſita, eademque duas habeat partes, invenietur ejus quantitas contraria hoc artificio: mutetur uni ejus parti ſignum $+$, aut $-$, quo affecta reperitur, & facta hac mutatione, elevetur quantitas tota ad poteſtatem, cujus index ſit unitate una minor indice ſigni radicalis: quippe ſi deinde ex terminis hujus poteſtatis deleantur coefficientes, hoc eſt numeri deſignantes, quoties termini illi ſumi debeant in poteſtate; erit ipſa illa poteſtas, ex cujus terminis deleti ſunt coefficientes, quantitas contraria quæſita.

Hac ratione ſi quantitas data radicalis ſit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, erit ejus quantitas contraria $\sqrt{a} - \sqrt{b}$: nam quum index ſigni radicalis ſit 2, elevanda eſt quantitas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ad poteſtatem, cujus index ſit 1; & propterea quantitas contraria quæſita erit ipſamet quantitas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Sed ſi data quantitas radicalis ſit $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, erit ejus contraria quantitas $\sqrt[3]{a^2} -$

$\sqrt[3]{ab}$

$\sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$: nam quum index ſigni radicalis ſit 3, elevanda eſt quantitas $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$ ad poteſtatem, cujus index ſit 2, hoc eſt ad poteſtatem ſecundam, ſive quadratum: proindeque, deletis coefficientibus ex terminis ejus, fiet $\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}$ quantitas contraria quæſita.

Nec obſcura erit hujus regulæ ratio, ſi conſideremus, quod ſicuti multiplicato $a + b$ per $a - b$, producitur $a^2 - b^2$; ſic multiplicato $a + b$ per $a^2 - ab + b^2$, productum oriatur $a^3 - b^3$; & multiplicato $a + b$ per $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, productum fiat $a^4 - b^4$; atque ita deinceps. Hinc enim clarè liquet, quod ſi $a + b$ referat quantitatem radicalem, ejus quantitas contraria debeat eſſe $a - b$, quum index ſigni radicalis eſt 2; $a^2 - ab + b^2$, quum ille index eſt 3; $a^3 - a^2b + ab^2 - b^3$, quum idem index eſt 4; atque ita de aliis: quandoquidem facta unius per aliam multiplicatione, habebuntur dumtaxat in producto ipſarum a, & b eæ poteſtates, quas index ſigni radicalis oſtendit.

Eadem autem eſt operandi ratio, ſi una ex duabus partibus radicalis propoſitæ ſit commenſurabilis, ac rationalis: nam ſem-

ſemper producta alia, contrarietate ſignorum, ſeſe mutuò deſtruunt, & dumtaxat remanent ipſarum partium poteſtates illæ, quas index ſigni partis radicalis oſtendit: qua ratione ſi quantitas radicalis data ſit $a + \surd c$, & quæratur ejus quantitas contraria, erit illa $a - \surd c$; & ſimiliter ſi data quantitas radicalis ſit $a + \surd 3\, c$, erit ejus contraria quantitas $a^2 - a\surd 3\, c + \surd 3\, c^2$.

Quod ſi quantitas radicalis tres partes habeat, paulò difficilior erit contrariæ quantitatis inventio. Interim pro iis, in quibus index ſigni radicalis eſt 2, inveniri poteſt hac arte. Sit $\surd a + \surd b + \surd c$ quantitas propoſita. Mutetur uni ejus parti, puta $\surd c$, ſignum, quo affecta reperitur; multipliceturque $\surd a + \surd b + \surd c$ per $\surd a + \surd b - \surd c$. Et quoniam ex hac multiplicatione producitur quantitas $a + b - c + 2\surd ab$, in qua unicus tantùm terminus afficitur ſigno radicali; conſiderari iſta poterit, veluti radicalis duabus partibus conſtans: & propterea ſi rurſus multiplicetur per contrariam ipſius $a + b - c - 2\surd ab$, orietur tandem quantitas omnino rationalis $a^2 - 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$. Unde quia quantitas propoſita evadit rationalis, multi-

 pli-

plicando eam primò per $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$, & deinde per $a + b - c - 2\sqrt{ab}$; erit ejus quantitas contraria productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}$ per $a + b - c - 2\sqrt{ab}$.

Pro iis autem, in quibus index ſigni radicalis eſt 3, juvabitur Tyro noſter hac regula. Sit $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$ quantitas propoſita. Sumantur tam quadrata partium omnium, quàm producta ex ſingulis binis earundem partium, illa quidem propriis ſuis ſignis, hæc ſignis omnino mutatis; tum addantur omnia in unum, & per ſummam, quæ inde oritur, $\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2} + \sqrt[3]{c^2} + \sqrt[3]{ab} - \sqrt[3]{ac} + \sqrt[3]{bc}$ multiplicetur quantitas propoſita $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$. Quum enim ex hac multiplicatione producatur quantitas $a - b + c - 3\sqrt[3]{abc}$, in qua unicus tantùm terminus afficitur ſigno radicali; conſiderari hæc poterit, veluti radicalis duabus partibus conſtans: quocirca, ſi per ejus contrariam quantitatem multiplicetur ſumma illa ſuperiùs conſtituta, erit productum quantitas contraria quæſita

Jam quemadmodum pro radicalibus, quæ plures habent partes, quàm tres, inutile eſt regulas cudere, quibus earum con-

contrariæ quantitates poſſint inveniri; quum tantùm non impoſſibile ſit, ut iis quandoque uti debeamus. Ita neque etiam neceſſarium exiſtimo, regulas afferre pro inveniendis quantitatibus contrariis earum radicalium, quæ habent quidem tres partes, ſed index ſigni radicalis ternarium excedit; quum non ita frequens ſit uſus ipſarum, & quum requiruntur, poſſint facillimè per analyſim inveniri. Unde, ne Lectorem diutiùs detineam, ad diviſionem radicalium compoſitarum, ubi cernitur hujus doctrinæ uſus, gradum facio.

VI.

Diviſio radicalium compoſitarum.

Quantitates radicales compoſitæ dividi poſſunt per ſe mutuò eadem quoque ratione, qua fit diviſio quantitatum commenſurabilium. Proponatur, exempli cauſa, dividenda quantitas radicalis $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$ per quantitatem aliam radicalem $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Divido primùm $\sqrt{ac}$ per $\sqrt{a}$: & quia multiplicato diviſore $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ per quotientem $\sqrt{c}$, producitur quantitas $\sqrt{ac} - \sqrt{bc}$, quæ ſubtracta ex quantitate divi-

denda, relinquit $-\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$, divido ſecundò $-\sqrt{ad}$ per $\sqrt{a}$: quumque quantitas, quæ producitur, multiplicando diviſorem $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ per alium iſtum quotientem $-\sqrt{d}$, ſit $-\sqrt{ad}+\sqrt{bd}$, quæ ſubducta ex illo reſiduo, relinquit nihil; concludo, quotientem totius diviſionis eſſe $\sqrt{c}-\sqrt{d}$.

Similiter, ſi dividenda proponatur quantitas radicalis $\sqrt{18}-\sqrt{12}-\sqrt{15}+\sqrt{10}$ per quantitatem aliam radicalem $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; divido primum $\sqrt{18}$ per $\sqrt{3}$: & quoniam quotiens hujus diviſionis eſt quantitas $\sqrt{6}$, quæ multiplicata per diviſorem $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, producit quantitatem $\sqrt{18}-\sqrt{12}$, ſubtraho quantitatem iſtam ex quantitate dividenda: & quia relinquitur $-\sqrt{15}+\sqrt{10}$, divido ſecundò $-\sqrt{15}$ per $\sqrt{3}$: quumque, multiplicato quotiente iſtius diviſionis $-\sqrt{5}$ per diviſorem $\sqrt{3}-\sqrt{2}$, oriatur quantitas $-\sqrt{15}+\sqrt{10}$, quæ ſubducta ex illo reſiduo, relinquit zero, ſive nihilum; proinde quotiens propoſitæ diviſionis erit $\sqrt{6}-\sqrt{5}$.

Jam ſi fieri poſſit, ut diviſor unicum terminum contineat, haud dubiè longè faciliùs diviſio perficietur. Ut ſi velim, exempli gratia, dividere $\sqrt{12}+\sqrt{15}-\sqrt{6}$

$\sqrt{6} - \sqrt{21}$ per $\sqrt{3}$, nulla occurret in diviſione difficultas; quia eò res redit, ut quatuor radicales ſimplices per unam, eandemque radicalem quoque ſimplicem dividatur. Id itaque poteſt obtineri, ſi methodo, ſuperiùs tradita, inveniatur quantitas contraria diviſoris, per quam tam diviſor, quàm quantitas dividenda multiplicetur. Nam quum diviſor evadat rationalis, unicum tantummodo terminum continebit; & proinde res, quò velimus, reducetur.

Multiplicari verò debet per quantitatem contrariam diviſoris, tum diviſor, tum quantitas dividenda, ut diviſio propoſita non alteretur, & unus idemque quotiens utraque operandi ratione inveniatur. Notum quippe eſt, diviſione non aliud quæri, quàm quoties una quantitas in alia contineatur, ſive quæ ratio inter duas quantitates exiſtat: proindeque, quia duæ quantitates eandem inter ſe retinent rationem, quotieſcumque ambæ per eandem quantitatem multiplicantur; perſpicuum eſt, mutuam duarum quantitatum diviſionem non alterari, quum tam diviſor, quàm quantitas dividenda per unam eandemque quantitatem multiplicatur.

Digitized by Google

Hac ratione quotiens, qui oritur, dividendo 12 per 3, eſt 4; qui etiam reperitur, ſi multiplicetur tam 12, quàm 3 per unum eundemque numerum 5, & dividatur 60 per 15. Similiter quotiens, qui oritur, dividendo ab per a, eſt b; & ſi utique multiplicetur tam a, quàm ab per c, dividaturque abc per ac, prodibit idem quoque quotiens b. Quocirca quotieſcumque quantitas radicalis, quæ locum tenet diviſoris, multiplicatur per contrariam ejus quantitatem, ut fiat rationalis; ne propoſita diviſio alteretur, multiplicanda eſt etiam per eandem quantitatem contrariam quantitas dividenda.

Proponatur itaque dividenda quantitas $\sqrt{24} + \sqrt{8}$ per $\sqrt{5} + \sqrt{3}$. Capiatur quantitas contraria diviſoris, quæ per regulam, ſuperiùs traditam, erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Multiplicetur per eam, tam quantitas dividenda $\sqrt{24} + \sqrt{8}$, quàm quæ diviſoris locum tenet $\sqrt{5} + \sqrt{3}$; & fiet una $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$; altera 2, ſive $\sqrt{4}$. Denique dividatur $\sqrt{120} + \sqrt{40} - \sqrt{72} - \sqrt{24}$ per $\sqrt{4}$; & erit $\sqrt{30} + \sqrt{10} - \sqrt{18} - \sqrt{6}$ quotiens propoſitæ diviſionis.

Proponatur ſimiliter dividenda quan-

titas

titas $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$ per $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Capiatur quantitas contraria diviſoris, quæ juxta regulam, ſuperiùs traditam, erit $\sqrt{3} + \sqrt{2}$. Multiplicetur per quantitatem iſtam, tum quantitas dividenda $\sqrt{18} - \sqrt{12} - \sqrt{15} + \sqrt{10}$, cùm illa, quæ ſtat loco diviſoris, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. Denique dividatur productum, quod oritur ex priori multiplicatione, $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$, per productum, quod oritur ex ſecunda. Et quia productum iſtud eſt unitas, quæ ſicuti multiplicatione non auget quantitatem multiplicandam, ita nec diviſione minuit dividendam; erit quotiens propoſitæ diviſionis $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$.

Ne autem hæreant Tyrones, quod ex eadē diviſione, alia operandi ratione, ortus ſit quotiens $\sqrt{6} - \sqrt{5}$, ſciant velim, quod ſi termini quantitatis $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ contrahantur, & ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocentur, prodibit ipſa quantitas $\sqrt{6} - \sqrt{5}$. Termini namque $\sqrt{54} - \sqrt{24}$ contracti fiunt $3\sqrt{6} - 2\sqrt{6}$, hoc eſt $\sqrt{6}$; termini verò $- \sqrt{45} + \sqrt{20}$, quum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducuntur, evadunt $- 3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}$, hoc eſt $- \sqrt{5}$. Quare quantitas tota $\sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24} + \sqrt{20}$ idem

erit, ac $\sqrt{6} - \sqrt{5}$.

Jam proponatur dividenda quantitas $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$ per $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. Sumatur quantitas contraria diviſoris, quæ per regulam, ſuperiùs traditam, erit $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Multiplicetur per quantitatem iſtam, tum quantitas dividenda $\sqrt{ac} - \sqrt{bc} - \sqrt{ad} + \sqrt{bd}$, cùm quantitas $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, quæ locum tenet diviſoris; & una fiet $\sqrt{a^2c} - \sqrt{a^2d} - \sqrt{b^2c} + \sqrt{b^2d}$, altera $a - b$. Denique dividatur $\sqrt{a^2c} - \sqrt{a^2d} - \sqrt{b^2c} + \sqrt{b^2d}$ per $a - b$; ſed ad diviſionem iſtam peragendam reducantur termini illius ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, ut loco ejus habeatur hæc alia $\overline{a - b}\sqrt{c} - \overline{a + b}\sqrt{d}$: quo facto clarè liquet, quotientem ex diviſione oriundum fore $\sqrt{c} - \sqrt{d}$, ſcilicet eundem illum, qui alia operandi ratione paulò ante fuit inventus.

CAP. IX.

Extractio radicum ex Binomiis.

Diximus, quantitatum radicalium alias eſſe ſimplices, alias compoſitas; & ſimplices quidem vocari, quæ unicum habent terminum, eumque affe-
ctum

Digitized by Google

ctum ſigno radicali; compoſitas verò, quæ plures terminos involvunt. Jam radicales ſimplices dicuntur paſſim monomia, quaſi quantitates unius nominis, ſive termini; & ob eandem rationem radicales compoſitæ dici ſolent multinomia, quia ſcilicet plura nomina, ſive terminos continent. Sed propter multitudinem terminorum diſtinguuntur radicales compoſitæ in binomia, trinomia, quadrinomia, &c. Quæ enim duos habent terminos, dicuntur binomia; quæ tres, trinomia; quæ quatuor, quadrinomia; atque ita deinceps.

Diverſitas autem terminorum à diverſitate quantitatū, quæ in iis terminis, ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocatis, ſub radicali ſigno continentur, repeti debet. Nam ſi in radicalibus cōpoſitis duæ, aut plures radicales ſimplices occurrant, quæ reductæ ad ſuas ſimpliciores expreſſiones, eandem habeant ſub radicali ſigno quantitatem; eæ nō totidem terminos, ſed unicum conſtituere dicuntur: qua ratione quantitas radicalis compoſita $3\sqrt{3} + 4\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$ cenſeri debet binomium, & non trinomium; quia ſcilicet partes duæ $3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}$, velut eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, reducuntur ad unam

unam $5\sqrt{3}$; atque adeo non duos, ſed unicum terminum conſtituunt.

Quod quidem non modò in iis radicalibus locum habet, in quibus fieri poteſt hujuſmodi contractio, hoc eſt, in quibus vel coefficientes ſunt numerici, vel iiſdem litteris deſignantur; verùm etiam in iis, quorum coefficientes diverſis litteris exprimuntur. Sic etiam quantitas radicalis compoſita $a\sqrt{a} + c\sqrt{b} + c\sqrt{a}$ cenſenda eſt binomium, & non trinomium. Nam etſi partes duæ $a\sqrt{a} + c\sqrt{a}$, eandem ſub ſigno radicali quantitatem habentes, inter ſe mutuò contrahi nequeant, quippe quæ diverſas litteras pro ſuis coefficientibus habent; adhuc tamen pro unico termino ſumi debent, & ſimpliciùs exprimi poſſunt, vel in hunc modum $\overline{a + c}\sqrt{a}$, vel etiam in hunc alium $d\sqrt{a}$, ſubſtituendo ſolam litteram d loco ipſarum $a + c$.

Neque verò, ut radicales compoſitæ dicantur binomia, trinomia, aut quadrinomia, neceſſe eſt, ut omnes ipſarum termini radicalibus ſignis afficiantur. Iiſdem quippe nominibus deſignandæ ſunt etiam, ſi in iis aliquis terminus fuerit commenſurabilis, ac ratio-

nalis

nalis. Sed quemadmodum omnes illæ partes radicales, quæ eandem ſub ſigno radicali continent quantitatem, pro uno eodemque termino computantur; ſic etiam, etſi plures fuerint partes commenſurabiles, ac rationales, omnes tamen pro uno eodemque termino ſumi debent: qua ratione quantitas $a + b + \sqrt{c}$ binomium erit, & non trinomium; quia ſcilicet partes duæ a, & b, utpote rationales, nonniſi unicum terminum componunt.

Calculum radicalium compoſitarum ſuperiori capite complexi ſumus; ſed in eo dumtaxat additionem, ſubtractionem, multiplicationem, formationem poteſtatum, & diviſionem hujuſmodi quantitatum explicuimus: nimirum quia extractio radicum ex iiſdem quantitatibus res digna nobis viſa fuit, quæ peculiari capite pertractetur. Eam igitur explicãdam aggreſſi ſumus hoc alio capite. Sed quoniam in reſolutione problematum, quorſum hæc omnia tendunt, non alius fere caſus occurrit, quàm, ut radices extrahantur ex iis quantitatibus radicalibus, quæ duos terminos habentes, dicuntur binomia; idcirco de extractione radicum ex binomiis dumtaxat hìc verba faciemus.

Bino-

Binomia autem, ex quibus radices erunt extrahendæ, non ex cujuſcumque generis radicalibus conſtabunt, ſed ex iis dumtaxat, quæ ſigno quadratæ radicis afficiuntur. Cujus rei ratio eſt, tum quia hujuſmodi potiſſimum binomia in problematum reſolutione nobis occurrunt, tum etiam, quia ex aliis binomiis non ita facile eſt, radices extrahere. Sed radices horum binomiorum tales etiam optamus, ut nonniſi ejusdẽ generis radicales comprehendant. Nam etſi nequaquam nos lateat, radicem exempli gratia quadratam binomii $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ exiberi poſſe in hunc modum $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$; arbitramur tamen meliùs facturum, qui ingenuè fatetur, eam extrahi non poſſe, eandemque exhibet, adhibito alio ſigno radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

I.

Extractio radicis quadratæ ex binomiis.

Circa radicem quadratam, ex binomio aliquo extrahendam, duo caſus fingi poſſunt. Primò, quod radix illa ſit binomium aliud, in quo utrũque nomen

eſt

eſt quantitas radicalis. Secundò, quod eadem illa radix ſit binomium, cujus nomen unum eſt quantitas radicalis, nomen verò alterum quantitas commenſurabilis, ac rationalis.

Quantum ad primum, repræſentet $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radicem binomii propoſiti. Itaque ſi fiat quadratum ex $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, erit $5 + 2\sqrt{6}$ ipſum binomium propoſitum: in quo, ut vides, unus terminus eſt rationalis, alter incommenſurabilis, & radicalis.

Quantum ad ſecundum, referat binomii propoſiti radicem $2 + \sqrt{5}$. Quocirca ſi fiat quoque quadratum ex $2 + \sqrt{5}$, erit $9 + 2\sqrt{20}$ binomium propoſitum: quod ſimiliter, ut vides, unum continet terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, & radicalem.

Hinc itaque diſcimus, quod ut ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix extrahi poſſit, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat, unus ex terminis ejus debeat eſſe rationalis, alter incommenſurabilis, ac radicalis. Nam ſi uterque terminus radicali ſigno ſit affectus, nullum binomium fingi poterit, cujus quadratum producat binomium propoſitum.

Neque

Neque verò ex omnibus hujuſmodi binomiis, in quibus unus terminus eſt rationalis, alter radicalis, quadratam radicem eruere licet, qualiter eam optamus. Quocirca, ut innoteſcat, quæ ulteriùs requirantur, referat indefinitè $\surd a + \surd b$ radicem alicujus binomii. Itaque ſi fiat quadratum ex $\surd a + \surd b$, erit $a + b + 2\surd ab$ binomium iſtud: in quo $a + b$ eſt terminus rationalis, & $2\surd ab$ terminus radicalis.

Et quoniam $\surd ab$ eſt medio loco proportionalis inter a, & b; erit terminus rationalis $a + b$ major termino radicali $2\surd ab$; quandoquidem oſtenſum eſt ab Euclide, in omni proportione maximum, & minimum terminum duobus reliquis majores eſſe: proindeque ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi poſſit, non modò unus ejus terminus debet eſſe rationalis, alter radicalis; verùm etiam terminus rationalis debet eſſe major termino radicali.

Præterea, quia terminus radicalis $2\surd ab$ eſt duplum ejus, quod fit ex mutua multiplicatione quantitatum, quarum quadrata ſunt a, & b; perſpicuum eſt, quod ſi ex quadrato termini rationalis $a^2 + 2ab + b^2$ ſubducatur quadratum termini radica-

dicalis $4ab$, reſiduum $a^2 - 2ab + b^2$ ſit etiam quadratum. Quocirca, ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi queat, illud quoque requiritur, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, ſit etiam quadratum.

Extrahetur itaque ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat: ſi binomium illud tribus hiſce cōditionibus gaudeat; primò, ut unus ejus terminus ſit radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis; ſecundò, ut terminus commenſurabilis major ſit termino radicali; & tertiò, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit etiam quadratum.

Jam regula extrahendi radicem quadratam ex binomio, quod his conditionibus ſit præditum, hæc eſt: capiatur differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii; ejuſque radix quadrata primò addatur termino rationali, deinde ex eodem ſubducatur: capiantur porro ſemiſſes ſummæ, & reſiſidui; eruntque radices harum ſemiſſium termini quæſitæ radicis.

Proponatur, exempli cauſa, extrahenda quadrata radix ex binomio $8 + \sqrt{60}$. In hoc binomio jam adſunt tres illæ conditio-

Neque verò ex omnibus hujuſmodi binomiis, in quibus unus terminus eſt rationalis, alter radicalis, quadratam radicem eruere licet, qualiter eam optamus. Quocirca, ut innoteſcat, quæ ulteriùs requirantur, referat indefinitè $\surd a + \surd b$ radicem alicujus binomii. Itaque ſi fiat quadratum ex $\surd a + \surd b$, erit $a + b + 2\surd ab$ binomium iſtud: In quo $a + b$ eſt terminus rationalis, & $2\surd ab$ terminus radicalis.

Et quoniam $\surd ab$ eſt medio loco proportionalis inter a, & b; erit terminus rationalis $a + b$ major termino radicali $2\surd ab$; quandoquidem oſtenſum eſt ab Euclide, in omni proportione maximum, & minimum terminum duobus reliquis majores eſſe: proindeque ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi poſſit, non modò unus ejus terminus debet eſſe rationalis, alter radicalis; verùm etiam terminus rationalis debet eſſe major termino radicali.

Præterea, quia terminus radicalis $2\surd ab$ eſt duplum ejus, quod fit ex mutua multiplicatione quantitatum, quarum quadrata ſunt a, & b; perſpicuum eſt, quod ſi ex quadrato termini rationalis $a^2 + 2ab + b^2$ ſubducatur quadratum termini radica-

dicalis $4ab$, reſiduum $a^2 - 2ab + b^2$ ſit etiam quadratum. Quocirca, ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi queat, illud quoque requiritur, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, ſit etiam quadratum.

Extrahetur itaque ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat, ſi binomium illud tribus hiſce cōditionibus gaudeat; primò, ut unus ejus terminus ſit radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis; ſecundò, ut terminus commenſurabilis major ſit termino radicali; & tertiò, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit etiam quadratum.

Jam regula extrahendi radicem quadratam ex binomio, quod his conditionibus ſit præditum, hæc eſt: capiatur differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii; ejuſque radix quadrata primò addatur termino rationali, deinde ex eodem ſubducatur; capiantur porro ſemiſſes ſummæ, & reſiſidui; eruntque radices harum ſemiſſium termini quæſitæ radicis.

Proponatur, exempli cauſa, extrahenda quadrata radix ex binomio $8 + \sqrt{60}$. In hoc binomio jam adſunt tres illæ conditio-

tiones. Nam primò unus ejus terminus eſt rationalis, alter radicalis; ſecundò terminus rationalis 8 excedit terminum radicalem $\surd 60$, quum quadratũ illius ſit 64, quadratum verò iſtius 60; & tertiò differentia quadratorum ex terminis ejus eſt etiam quadratum, quum ſit numerus 4.

Capiatur itaque differentia iſta 4, ejuſque quadrata radix 2, primò quidem addatur termino rationali 8, ut habeatur ſumma 10; deinde verò ex eodem termino ſubtrahatur, ut oriatur reſiduum 6. Quumque ſemiſſis ſummæ ſit 5, ſemiſſis verò differentiæ ſit 3, capiantur radices harum ſemiſſium; & erit $\surd 5 + \surd 3$ radix quadrata propoſiti bonomii $8 + \surd 60$.

Oporteat ſimiliter quadratam radicem extrahere ex binomio $11 + \surd 72$, quod etiam tribus illis conditionibus gaudet. Capiatur differentia quadratorum ex terminis ejus: & quoniam quadratum termini rationalis eſt 121, quadratum verò termini radicalis eſt 72; erit 49 differentia quæſita. Sumatur poſtea quadrata radix hujus differentiæ, ſcilicet 7, quæ primò addatur termino rationali, ut fiat ſumma 18; deinde ex eodem ſubducatur, ut habeatur reſiduum 4. Denique ſuman-

mantur ſemiſſes, tam ſummæ, quàm reſidui, & radices harum ſemiſſium $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ dabunt radicem quæſitam.

Sed notetur hoc loco velim, radices illarum ſemiſſium non ſemper conjungendas eſſe ſigno +, ut propoſiti binomii quadrata radix habeatur; ſed interdum ſigno +, interdum verò ſigno —: id, quod ex ipſo binomio propoſito cognoſci poteſt. Nam ſiquidem termini ejus ſigno + conjunguntur, conjungendæ ſunt etiam ſigno + radices illarum ſemiſſium; quod ſi verò termini binomii propoſiti ſigno — conjuncti reperiantur, & ipſæ illæ ſemiſſium radices ſigno — debent inter ſe mutuò conjungi. Qua ratione quadrata radix binomii $8 - \sqrt{60}$ erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; & ſimiliter quadrata radix binomii $11 - \sqrt{72}$ erit $3 - \sqrt{2}$.

Perinde autem res eſt, ſive ſcribatur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, ſive $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$; quum notum ſit, eandem ſemper quantitatem produci, ſive multiplicetur $a - b$ per ſe ipſam, ſive viciſſim $b - a$. Sed non perinde eſt, ſive binomium propoſitum ſit $8 - \sqrt{60}$, ſive viciſſim $\sqrt{60} - 8$; quandoquidem in primo caſu radix eſt realis, in ſecundo autem imaginaria, hoc eſt, quæ tantum

Binomia autem, ex quibus radices erunt extrahendæ, non ex cujuſcumque generis radicalibus conſtabunt, ſed ex iis dumtaxat, quæ ſigno quadratæ radicis afficiuntur. Cujus rei ratio eſt, tum quia hujuſmodi potiſſimum binomia in problematum reſolutione nobis occurrunt, tum etiam, quia ex aliis binomiis non ita facile eſt, radices extrahere. Sed radices horum binomiorum tales etiam optamus, ut nonniſi ejusdẽ generis radicales comprehendant. Nam etſi nequaquam nos lateat, radicem exempli gratia quadratam binomii $\sqrt{32} - \sqrt{24}$ exiberi poſſe in hunc modum $\sqrt[4]{18} - \sqrt[4]{2}$; arbitramur tamen meliùs facturum, qui ingenuè fatetur, eam extrahi non poſſe, eandemque exhibet, adhibito alio ſigno radicali, quod quantitatem totam comprehendat.

I.

Extractio radicis quadratæ ex binomiis.

Circa radicem quadratam, ex binomio aliquo extrahendam, duo caſus fingi poſſunt. Primò, quod radix illa ſit binomium aliud, in quo utrũque nomen

eſt

eſt quantitas radicalis. Secundò, quod eadem illa radix ſit binomium, cujus nomen unum eſt quantitas radicalis, nomen verò alterum quantitas commenſurabilis, ac rationalis.

Quantum ad primum, repræſentet $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ radicem binomii propoſiti. Itaque ſi fiat quadratum ex $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, erit $5 + 2\sqrt{6}$ ipſum binomium propoſitum: in quo, ut vides, unus terminus eſt rationalis, alter incommenſurabilis, & radicalis.

Quantum ad ſecundum, referat binomii propoſiti radicem $2 + \sqrt{5}$. Quocirca ſi fiat quoque quadratum ex $2 + \sqrt{5}$, erit $9 + 2\sqrt{20}$ binomium propoſitum: quod ſimiliter, ut vides, unum continet terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, & radicalem.

Hinc itaque diſcimus, quod ut ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix extrahi poſſit, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat, unus ex terminis ejus debeat eſſe rationalis, alter incommenſurabilis, ac radicalis. Nam ſi uterque terminus radicali ſigno ſit affectus, nullum binomium fingi poterit, cujus quadratum producat binomium propoſitum.

Neque

Digitized by Google

Neque verò ex omnibus hujuſmodi binomiis, in quibus unus terminus eſt rationalis, alter radicalis, quadratam radicem eruere licet, qualiter eam optamus. Quocirca, ut innoteſcat, quæ ulteriùs requirantur, referat indefinitè $\surd a + \surd b$ radicem alicujus binomii. Itaque ſi fiat quadratum ex $\surd a + \surd b$, erit $a + b + 2\surd ab$ binomium iſtud: in quo $a + b$ eſt terminus rationalis, & $2\surd ab$ terminus radicalis.

Et quoniam $\surd ab$ eſt medio loco proportionalis inter a, & b; erit terminus rationalis $a + b$ major termino radicali $2\surd ab$; quandoquidem oſtenſum eſt ab Euclide, in omni proportione maximum, & minimum terminum duobus reliquis majores eſſe: proindeque ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi poſſit, non modò unus ejus terminus debet eſſe rationalis, alter radicalis; verùm etiam terminus rationalis debet eſſe major termino radicali.

Præterea, quia terminus radicalis $2\surd ab$ eſt duplum ejus, quod fit ex mutua multiplicatione quantitatum, quarum quadrata ſunt a, & b; perſpicuum eſt, quod ſi ex quadrato termini rationalis $a^2 + 2ab + b^2$ ſubducatur quadratum termini radica-

dicalis $4ab$, reſiduum $a^2 - 2ab + b^2$ ſit etiam quadratum. Quocirca, ut ex aliquo binomio quadrata radix extrahi queat, illud quoque requiritur, ut differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, ſit etiam quadratum.

Extrahetur itaque ex aliquo binomio ejuſmodi quadrata radix, quæ nonniſi radicales quadraticas comprehendat ſi binomium illud tribus hiſce cōditionibus gaudeat; primò, ut unus ejus terminus ſit radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis; ſecundò, ut terminus commenſurabilis major ſit termino radicali; & tertiò, ut differentia quadratorum ex terminis ejus ſit etiam quadratum.

Jam regula extrahendi radicem quadratam ex binomio, quod his conditionibus ſit prædītum, hæc eſt: capiatur differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii; ejuſque radix quadrata primò addatur termino rationali, deinde ex eodem ſubducatur: capiantur porro ſemiſſes ſummæ, & reſidui; eruntque radices harum ſemiſſium termini quæſitæ radicis.

Proponatur, exempli cauſa, extrahenda quadrata radix ex binomio $8 + \sqrt{60}$. In hoc binomio jam adſunt tres illæ conditio-

tio-

mantur ſemiſſes, tam ſummæ, quàm reſidui, & radices harum ſemiſſium $3 + \sqrt{2}$ dabunt radicem quæſitam.

Sed notetur hoc loco velim, radices illarum ſemiſſium non ſemper conjungendas eſſe ſigno +, ut propoſiti binomii quadrata radix habeatur; ſed interdum ſigno +, interdum verò ſigno —: id, quod ex ipſo binomio propoſito cognoſci poteſt. Nam ſiquidem termini ejus ſigno + conjunguntur, conjungendæ ſunt etiam ſigno + radices illarum ſemiſſium; quod ſi verò termini binomii propoſiti ſigno — conjuncti reperiantur, & ipſæ illæ ſemiſſium radices ſigno — debent inter ſe mutuò conjungi. Qua ratione quadrata radix binomii $8 - \sqrt{60}$ erit $\sqrt{5} - \sqrt{3}$; & ſimiliter quadrata radix binomii $11 - \sqrt{72}$ erit $3 - \sqrt{2}$.

Perinde autem res eſt, ſive ſcribatur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, ſive $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$; quum notum ſit, eandem ſemper quantitatem produci, ſive multiplicetur $a - b$ per ſe ipſam, ſive viciſſim $b - a$. Sed non perinde eſt, ſive binomium propoſitum ſit $8 - \sqrt{60}$, ſive viciſſim $\sqrt{60} - 8$; quandoquidem in primo caſu radix eſt realis, in ſecundo autem imaginaria, hoc eſt, quæ tantum

Digitized by Google

fingi, ac imaginari poteſt: quod quia non ſatis hoc loco intelligitur, fuſiùs à nobis oſtendetur, quum de quantitatibus imaginariis ſermo recurret.

Cęterùm allatæ regulæ ratio non eſt ita obſcura, ut hìc intelligi non poſſit. Si enim referat generaliter $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ radicem alicujus binomii, erit binomium iſtud $a + b + 2\sqrt{ab}$. Et quemadmodum clarè liquet, quod ſi ex quadrato termini rationalis $a^2 + 2ab + b^2$ ſubducatur quadratum termini radicalis $4ab$, reſiduum, ſive differentia $a^2 - 2ab + b^2$, ſit etiam quadratum; ita quoque liquidò conſtat, quod ſi radix hujus differentiæ $a - b$ addatur termino rationali $a+b$, eademque ex eodem termino ſubducatur, ſumma quidem ſit $2a$, reſiduum verò $2b$; quodque adeo ſi capiantur ſemiſſes hujus ſummæ, & hujus reſidui, radices iſtarum ſemiſſium ſint termini aſſumptæ radicis.

Nec ſilentio hìc præteribimus, quod ſi in radicibus extrahendis parùm curemus, ſi eæ radicales contineant quadraticas, aut alterius cujuslibet ſpeciei, poſſit eâdem regulâ etiam ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis, extrahi quandoque quadrata radix. Ut ſi

velim radicem quadratam extrahere ex binomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$, ſumo differentiam quadratorum ex terminis ejus, nempe 8; cujus quadratam radicem $\sqrt{8}$ primò addo termino $\sqrt{32}$, ut ſumma fiat $6\sqrt{2}$; deinde ex eodem termino ſubtraho, ut reſiduum oriatur $2\sqrt{2}$: quumque ſemiſſes harum quantitatum ſint $3\sqrt{2}$, & $\sqrt{2}$, ſumo iſtarum ſemiſſium radices quadratas, & erit $\sqrt[4]{18} + \sqrt[4]{2}$ radix quæſita.

Sed facilè erit intelligere, quod, ut mediante illâ regulâ extrahi poſſit quadrata radix ex binomio aliquo, cujus uterque terminus ſit radicalis, neceſſe ſit binomium illud hujuſmodi eſſe, ut differentia quadratorum ex terminis ejus haud quidem ſit quadratum, ſed ut ejus quadrata radix rationem habeat commenſurabilem, ac rationalem cũ aliquo ex terminis propoſiti binomii: quò ſcilicet, & addi, & ſubtrahi poſſit ex termino illo. Ita ex bonomio $\sqrt{32} + \sqrt{24}$ extracta eſt quadrata radix; quia radix prædictæ differentiæ $\sqrt{8}$ rationem habet commenſurabilem cum termino $\sqrt{32}$; quum ſi ambæ radicales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducantur, una fiat $2\sqrt{2}$, altera $4\sqrt{2}$.

II.

Extractio radicis cubicæ ex Binomiis.

SImiliter circa radicem cubicam, ex binomio aliquo extrahendam, duo caſus ſingi poſſunt. Primò, quod radix illa ſit binomium aliud, cujus uterque terminus eſt radicalis. Et ſecundò, quod eadem illa radix ſit hujuſmodi binomium, ut unus ejus terminus ſit radicalis, alter verò commenſurabilis, ac rationalis.

Itaque, quantum ad primum caſum, ponamus $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ eſſe radicem cubicam binomii propoſiti. Quocirca ſi fiat cubus ex $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, erit binomium propoſitum $\sqrt{8} + 3\sqrt{12} + 3\sqrt{18} + \sqrt{27}$, hoc eſt, reductis ſingulis hujus quantitatis partibus ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, $2\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 9\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$, ſive etiam $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$: in quo, ut vides, uterque terminus eſt radicalis.

Quantum verò ad ſecundum, ponamus propoſiti binomii radicem cubicam eſſe $2 + \sqrt{3}$. Itaque ſi fiat quoque cubus ex $2 + \sqrt{3}$, erit binomium propoſitum $8 + 12\sqrt{3} + 18 + 3\sqrt{3}$, hoc eſt $26 + 15\sqrt{3}$: quod

quod, ut vides, unum terminum continet radicalem, alterum commenſurabilem, ac rationalem.

Ex quibus liquet, radicem cubicam, quæ ſit ejus naturæ, qualem optamus, extrahi poſſe non modò ex binomio, cujus unus terminus eſt radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis; verùm etiam ex binomio, cujus uterque terminus eſt radicalis: quandoquidem cubus alicujus binomii, qui ſemper eſt aliud binomium, ſub utraq; forma poteſt haberi.

Sed liquet etiam, radicem cubicam alicujus binomii, quotieſcumque poteſt haberi, & quidem talis, qualis à nobis deſideratur, eſſe ejuſdem formæ cum binomio propoſito: nimirum ejus utrumque terminum radicalem eſſe, quotieſcumque uterque terminus binomii propoſiti eſt radicalis; & verò unum ejus terminum eſſe radicalem, alterum rationalem, quum in binomio propoſito ſimiliter unus terminus eſt radicalis, alter rationalis.

Jam cujuſcumque ſit formæ binomium propoſitum; ut ex eo extrahi poſſit radix cubica talis naturæ, qualem optamus, nempe, ut non aliis radicalibus, quàm quadraticis, conſtet, hujuſmodi debet eſſe, ut differentia qua-

dratorum, quæ fiunt ex terminis ejus, non quidem ſit quadratum, cujuſmodi ſit oportet, quum extrahenda eſt radix quadrata, ſed cubus perfectus.

Referat namque primò $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ radicem alicujus binomii cubicam: Itaque binomium iſtud erit $\overline{a + 3b}\sqrt{a} + \overline{3a + b}\sqrt{b}$. Et quoniam quadratum primi termini eſt $a^3 + 6a^2b + 9ab^2$, quadratum verò ſecundi eſt $9a^2b + 6ab^2 + b^3$; erit differentia iſtorum quadratorum $a^3 + 6a^2b + 9ab^2 - 9a^2b - 6ab^2 - b^3$, hoc eſt $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$: quam liquet eſſe cubum perfectum, quum radix ejus cubica ſit $a - b$.

Referat ſecundò $a + \sqrt{b}$ radicem cubicam alicujus dati binomii. Itaque ipſum binomium erit $a^3 + 3ab + \overline{3a^2 + b}\sqrt{b}$. Et quoniam quadratum termini rationalis eſt $a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2$, quadratum verò termini radicalis eſt $9a^4b + 6a^2b^2 + b^3$; erit differentia iſtorum quadratorum $a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2 - 9a^4b - 6a^2b^2 - b^3$, hoc eſt $a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3$: quam ſimiliter liquet cubum eſſe perfectum, quum radix ejus cubica ſit $a^2 - b$.

Sed cujuſque ſit formæ binomium propoſitum, perſpicuum eſt quoque, quod quum

quum ex eo radix cubica, qualem optamus, extrahi poteſt; non modò differentia quadratorum ex terminis ejus ſit cubus perfectus; verùm etiam radix cubica hujus differentiæ ſit differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis quæſitæ radicis. Nam quum radix cubica binomii erat $\sqrt{a} + \sqrt{b}$, radix cubica prædictæ differentiæ inventa eſt $a - b$; quotieſcumque verò erat $a + \sqrt{b}$, hæc prodiit $a^2 - b$.

Atque hinc pro extrahenda radice cubica ex binomio, cujus unus terminus ſit rationalis, alter radicalis, hæc regula deducitur: capiatur radix cubica proximè major binomii propoſiti, ſed quæ non ampliùs, quàm ſemiſſe unitatis differat à vera radice, quæ præter propter cognoſci poteſt; tum ex differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejuſdem binomii, eliciatur radix cubica, eaque per radicem illam proximè majorem dividatur.

Jam ſi terminus rationalis major fuerit termino radicali, quotiens, qui exinde oritur, addatur cum eadem illa radice proximè majori: & ſiquidem ſummæ hujus capiatur ſemiſſis ſine fractione, à cujus quadrato ſubducatur radix cubica

prædictæ quadratorum differentiæ; erit ſemiſſis illa pars rationalis, radix verò quadrata reſidui, inde orti, pars radicalis quæſitæ radicis.

Quod ſi autem terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex illa diviſione producitur, ſubducatur ex radice illa proximè majori: & ſiquidem reſidui hujus capiatur adhuc ſemiſſis ſine fractione, cujus quadrato addatur radix cubica prædictæ quadratorum differentiæ; erit rurſus ſemiſſis illa pars rationalis, radix verò quadrata ſummæ, inde ortæ, pars radicalis quæſitæ radicis.

In utroque porro caſu duæ iſtæ partes afficiendæ ſunt iiſdem omnino ſignis, quibus afficiuntur termini propoſiti binomii: adeo nempe, ut quo ſigno afficitur in propoſito binomio terminus rationalis, eodem quoque afficienda ſit pars rationalis in quæſita radice; & ſimiliter quo ſigno afficitur in binomio terminus radicalis, eodem etiam affici debeat pars radicalis in radice.

Extrahenda ſit igitur radix cubica ex binomio $100 + 51\sqrt{3}$. Quoniam terminus radicalis $51\sqrt{3}$ valet circiter 88, erit totius binomii valor ferè 188: quare radix

dix ejus cubica proximè major, quæ à vera non ampliùs, quàm ſemiſſe unitatis differat, erit 6. Capiatur itaque differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii, quumque ea ſit 2197, erit 13 radix ejus cubica, quæ ſiquidem dividatur per 6, fiet quotiens $\frac{13}{6}$. Et quoniam terminus rationalis 100 major eſt termino radicali $51\surd 3$, addatur quotiens ille cum radice cubica proximè majori 6, eritque 4 ſummæ ſemiſſis ſine fractione. Denique ex quadrato hujus ſemiſſis 16 ſubducatur radix cubica differentiæ quadratorum ex terminis binomii 13, ut reſiduum habeatur 3; & erit $4 + \surd 3$ radix cubica quæſita.

Extrahenda ſit etiam radix cubica ex binomio $25 + 22\surd 2$. Quoniam terminus radicalis $22\surd 2$ valet circiter 31, erit totius binomii valor ferè 56: proindeque radix ejus cubica proximè major, quæ à vera non ampliùs, quàm ſemiſſe unitatis differat, erit 4. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii eſt 343, erit 7 radix ejus cubica, quæ ſiquidem dividatur per 4, fiet quo-

tiens

tiens $\frac{7}{4}$. Unde porrò, quia terminus rationalis 25 minor eſt termino radicali $22\sqrt{2}$, ſubducatur quotiens ille ex radice cubica proximè majori 4, eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix cubica differentiæ quadratorum ex terminis binomii 7, ut habeatur ſumma 8; & erit $1 + \sqrt{8}$ radix cubica quæſita.

Sed nolim credatis, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, eſſe ſemper radicem cubicam propoſiti binomii. Eſt quippe ejus cubica radix, quotieſcumque hæc ex illo extrahi poteſt. Sed ſiquidem propoſitum binomium hujuſcemodi ſit, ut radicem cubicam non admittat; tunc quantitas, quæ per traditam regulam invenitur, ſi bis per ſe ipſam multiplicetur, propoſitum binomium non reſtituet. Id autem non aliter cognoſci poteſt, quàm ſi rei periculum fiat. Neque enim in extrahenda radice cubica ex aliquo binomio certum criterium haberi poteſt: cujus ope illico cognoſci queat, num radix illa extrahi poſſit, nec ne. Nam etſi, quum differen-

tia

tia quadratorum ex terminis propoſiti binomii nequaquam eſt cubus perfectus, extrahi illa non poſſit; non hinc tamen viciſſim extrahi ſemper poterit, quum differentia illa cubus prodit perfectus.

Extrahi autem non poteſt radix cubica, quotieſcumque differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii non eſt cubus perfectus; ſiquidem quæſita radix non alias radicales, quàm quadraticas, debeat continere. Sed ſi de qualitate radicalium nequaquam ſolliciti nos eſse velimus, extrahi quandoque poterit radix cubica etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam ſit cubus perfectus. Nam ſi termini iſtius binomii muitiplicentur per differentiam illam, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus cubus erit perfectus: quocirca ſi ex novo iſto binomio radix cubica extrahi poſſit, eadem diviſa per radicem cubicam prioris differentiæ, dabit radicem cubicam prioris binomii.

Ut ſi velim, exempli gratia, extrahere radicem cubicam ex binomio $22 + \sqrt{486}$, quod hujuſmodi eſt, ut differentia quadratorum ex terminis ejus, utpote 2, nequa-

quaquam ſit cubus perfectus; multiplico utrumque terminum per differentiam iſtam 2, & orietur novum binomium $44 + 2\sqrt{486}$, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus eſt cubus perfectus, quum ſit numerus 8. Jam, quia alterius hujus binomii $44 + 2\sqrt{486}$ radix cubica eſt $2 + \sqrt{6}$, divido radicem iſtam $2 + \sqrt{6}$ per radicem cubicam prioris differentiæ, hoc eſt per $\sqrt[3]{2}$: quumque hujus diviſionis quotiens ſit $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, erit quotiens iſte radix cubica prioris binomii $22 + \sqrt{486}$.

Atque hac ratione extrahi etiam quandoque poterit radix cubica ex binomio, cujus termini fractiones involvunt: ſcilicet ſi per multiplicationem tollantur fractiones illæ, & deinde novi binomii radix cubica dividatur per radicem cubicam quantitatis ejus, quæ vices geſſit multiplicatoris. Ut ſi, exempli cauſa, extrahenda ſit radix cubica ex binomio $\frac{11}{3} + \sqrt{\frac{54}{4}}$, multiplico utrumque terminum per 6, & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$. Unde quia novi hujus binomii radix cubica eſt $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, divido eam per $\sqrt[3]{6}$, & erit

$\sqrt[3]{}$.

$\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}} + \frac{\sqrt[6]{3}}{\sqrt[6]{2}}$ radix cubica propoſiti binomii.

Non diſſimili ratione extrahi poterit radix cubica ex binomio, cujus uterque terminus eſt radicalis: nimirum ſi multiplicationis ope unus ex terminis ejus fiat rationalis, & deinde radix cubica novi binomii dividatur per radicem cubicam illius quantitatis, quæ vices geſſit multiplicatoris. Ita ſi extrahenda ſit radix cubica ex binomio $11\sqrt{2} + \sqrt{243}$, cujus uterque terminus eſt radicalis; multiplico utrumque terminum per $\sqrt{2}$, & orietur novum binomium $22 + \sqrt{486}$, in quo unus terminus eſt radicalis, alter commenſurabilis, ac rationalis. Quocirca, quia alterius hujus binomii radix cubica eſt $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{54}$, divido eam per radicem cubicam ipſius $\sqrt{2}$, hoc eſt per $\sqrt[6]{2}$, eritque quotiens $\sqrt[6]{8} + \sqrt[6]{27}$ radix cubica propoſiti binomii.

Jam, ſi radix cubica extrahenda non alias radicales, quàm quadraticas, debeat continere, facilè erit inquirere, num ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis, radix cubica extrahi queat, eamque exhibere, quotieſcumque

poteſt

poteſt inveniri. Si enim termini propoſiti binomii ita ſimpliciùs exprimi poſſint, ut ſumma coefficientium ſit quadrupla ſummæ quantitatum, ſub ſignis exiſtentium; differentia verò eorundem coefficientium ſit dupla differentiæ, quæ inter eaſdem quantitates exiſtit: radix cubica extrahi poterit, eaque habebitur, ſi ex terminis illis prædicti coefficientes deleantur.

Oporteat, exempli gratia, radicem cubicam extrahere ex binomio $\sqrt{242} + \sqrt{243}$. Jam termini hujus binomii ſimpliciùs exprimi poſsunt hac ratione $11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$. Itaque quia ſumma coefficientium $11 + 9$ eſt quadrupla ſummæ quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, $2 + 3$; & differentia eorundem coefficientium $11 - 9$ eſt dupla differentiæ earundem quantitatum $3 - 2$: concludendum eſt, radicem cubicam ex propoſito binomio extrahi poſse, eamque eſse $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Oporteat ſimiliter radicem cubicam elicere ex $\sqrt{578} + \sqrt{605}$. Quoniam termini hujus binomii ſimpliciùs exprimi poſsunt in hunc modum $17\sqrt{2} + 11\sqrt{5}$; & expreſſis iis hac ratione, fit tam ſumma coefficientium $17 + 11$ quadrupla ſum-

Digitized by Google

ſummæ quantitatum, ſub ſignis exiſtentium, $2 + 5$; quàm differentia eorumdem coefficientium $17 - 11$ dupla differentiæ earundem quantitatum $5 - 2$: concludendum eſt quoque, propoſitum binomium radicem cubicam habere, eamque eſse $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

Nec difficile eſt, hujus regulæ rationem intelligere. Nam cubus binomii $\sqrt{a} + \sqrt{c}$ eſt hoc aliud binomium $\overline{a + 3c\sqrt{a}} + \overline{c + 3a\sqrt{c}}$: & profectò in hoc binomio, cujus radix cubica habetur, ſi ex terminis ejus deleantur coefficientes, clarè liquet, ſummam coefficientium $4a + 4c$ quadruplam eſſe ſummæ quantitatum, ſub ſignis exiſtentium $a + c$; differentiam verò eorundem coefficientium $2a - 2c$ eſse duplam differentiæ earundem quantitatum $a - c$.

III.

Extractio aliarum radicum ex Binomiis.

Quantum ad radices ſuperioris ordinis, ex binomiis extrahendas, ſufficiet, ſi tantùm rationem exponamus, qua extrahi illæ poſſunt, quæ ad poteſta-

tes

Digitized by Google

tes numeri imparis referuntur, veluti ſunt radices quintæ, ſeptimæ, nonæ, &c. Nam quantum ad eas, quæ referuntur ad poteſtates numeri paris, cujuſmodi ſunt radices quartæ, ſextæ, octavæ, &c.; poterunt haberi per extractionem, vel ſolius radicis quadratæ, vel quadratæ ſimul, & cubicæ, ſæpiùs repetitam.

Ut ſi, exempli cauſa, extrahenda ſit radix quadrato-quadrata ex binomio $17 + 12\sqrt{2}$; elicio primùm ex illo radicem quadratam $3 + 2\sqrt{2}$; deinde alterius hujus binomii ſumo adhuc quadratam radicem $1 + \sqrt{2}$; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix quadrato-quadrata quæſita. Similiter, ſi extrahenda ſit radix ſexta, ſive cubo-cubica ex binomio $99 + 70\sqrt{2}$ extràho primùm ex illo radicem quadratam $7 + 5\sqrt{2}$; tum novi hujus binomii ſumo radicem cubicam $1 + \sqrt{2}$; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix cubo-cubica propoſiti binomii.

Et quamquam hoc eodem artificio extrahi quoque poſſint quamplures radices, quæ ad poteſtates numeri imparis referuntur; veluti, ex. gratia, radix, quæ refertur ad poteſtatem nonam, quippe quæ haberi poteſt per duplicem radicis cubicæ extractionem. Nihilo tamen minus eas excipere non exiſtimamus; tum quia

re-

regula à nobis afferenda, non eſt diſſimilis ab illa, quã paulò ante attulimus, pro radicis cubicæ extractione; tum etiã quia inter radices numeri paris, & radices numeri imparis non leve diſcrimen intercedit.

Si enim eam nobis legem imponemus, ut radices extrahendæ non alias radicales, quàm quadraticas, debeant continere; radices numeri paris non ex aliis binomiis extrahi poterunt, quàm ex iis, quæ unum habent terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, ac radicalem: quo caſu radices ipſæ poterunt ſub utraque forma prodire; & nempe, ut unus earum terminus ſit rationalis, alter radicalis; & viciſſim, ut utrumque terminum contineant radicalem: quandoquidem ex utriuſque formæ binomio ſemper aliud producitur binomium, cujus unus terminus eſt rationalis, alter incommenſurabilis, & radicalis.

Sed eadem lege impoſita, etſi radices numeri imparis regulariter ex iis tantùm binomiis extrahi poſſint, quæ ſimiliter unum habent terminum rationalem, alterum incommenſurabilem, & radicalem; attamen radices ipſæ nonniſi ſub una forma poſſunt haberi, nempe tales, ut unus earum terminus ſit rationalis, alter

radicalis : quandoquidem ex binomio, quod utrumque terminum habeat radicalem, quotieſcumque poteſtas numeri imparis quæritur, regulariter non binomium, ſed trinomium producitur.

Et quamquam eæ numeri imparis radices, quæ haberi poſſunt eodem artificio, quo eruere licet radices numeri paris, extrahi quoque poſſint ex binomiis, quorum uterque terminus ſit radicalis; adhuc tamen radices ipſæ ſub una tantùm forma poſſunt haberi, nempe tales, ut earum uterque terminus ſit etiam radicalis : adeo, ut radices numeri imparis ſunt ſemper ejuſdem formæ cum ipſis binomiis propoſitis, quotieſcumque eæ extrahi poſſunt.

Horum omnium demonſtrationes hìc ſigillatim afferre, nequaquam nobis eſt animus. Tantùm fontes indicabimus, unde eæ ſunt repetendæ. Nempe primò, quod quantitatis, ſigno quadratæ radicis affectæ, poteſtas omnis numeri imparis ſit quantitas alia ſimiliter radicalis ; omnis verò poteſtas numeri paris ſit quantitas alia commenſurabilis, ac rationalis. Et ſecundò, quod ſi quantitas quæcumque, duabus ex partibus conſtans, ad poteſtatem aliquam attollatur; partes illæ

illæ in terminis intermediis quæſitæ poteſtatis ad omnes alias poteſtates inferiores elevatæ reperiantur.

Jam, quum regulariter radices numeri imparis ex iis tantùm binomiis extrahi poſſint, quæ unum habent terminum rationalem, alterum radicalem; ipſæque radices ejuſdem prodeant formæ cum binomiis propoſitis, referat $a + \sqrt{b}$ radicem extrahendam. Et ſiquidem ex ea poteſtas, de qua agitur, fiat; cognoſcemus, non modò poteſtatem iſtam eſſe binomium aliud, cujus unus ſimiliter terminus eſt rationalis, alter radicalis; verùm etiam differentiam quadratorum ex terminis ejus poteſtatem eſſe perfectam ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur.

Ut ſi, exempli cauſa, $a + \sqrt{b}$ ſit radix quinta alicujus binomii; multiplicando $a + \sqrt{b}$ quater in ſe ipsã, fiet binomiũ illud $a^5 + 5a^4\sqrt{b} + 10a^3b + 10a^2b\sqrt{b} + 5ab^2 + b^2\sqrt{b}$, in quo $a^5 + 10a^3b + 5ab^2$ eſt terminus rationalis, & $5a^4\sqrt{b} + 10a^2b\sqrt{b} + b^2\sqrt{b}$, hoc eſt $\overline{5a^4 + 10a^2b + b^2}\sqrt{b}$ eſt terminus radicalis. Et quoniam quadratum ex termino rationali eſt $a^{10} + 20a^8b + 110a^6b^2 + 100a^4b^3 + 25a^2b^4$, quadratum verò termini radicalis eſt

$25a^8b + 100a^6b^2 + 110a^4b^3 + 20a^2b^4 + b^5$; erit differentia iſtorum quadratorum $a^{10} + 20a^8b + 110a^6b^2 + 100a^4b^3 + 25a^2b^4 - 25a^8b - 100a^6b^2 - 110a^4b^3 - 20a^2b^4 - b^5$, hoc eſt $a^{10} - 5a^8b + 10a^6b^2 - 10a^4b^3 + 5a^2b^4 - b^5$: quam liquet eſſe quadrato-cubum perfectum, quum radix ejus quadrato-cubica ſit $a^2 - b$.

Sed cognoſcemus quoque, quod quum ex aliquo binomio radix numeri imparis, quæ talis ſit, qualem optamus, extrahi poteſt, non modò differentia quadratorum ex terminis ejus ſit poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur; verùm etiam radix hujus differentiæ, ab eadem poteſtate denominata, ſit differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis extrahendæ radicis. Sic in exemplo adducto radix quadrato-cubica prædictæ quadratorum differentiæ eſt $a^2 - b$: quam liquet differentiam eſſe quadratorum ex terminis aſſumptæ radicis $a + \surd b$.

Unde modò pro extrahendis radicibus numeri imparis ex binomiis, quorum unus terminus ſit rationalis, alter radicalis, regula nobis non diſſimilis oritur ab ea, quam pro extractione radicis cubicæ ſupe-

ſuperiùs attulimus: nimirum ex binomio propoſito capiatur radix, de qua agitur, proximè major, ſed quæ non ampliùs, quàm ſemiſſe unitatis, differat à vera radice, quæ præter propter cognoſci poteſt; tum ex differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis ejuſdem binomii, eliciatur ſimiliter radix, de qua agitur, eaque per radicem illam proximè majorem dividatur.

Porrò, ſi terminus rationalis major fuerit termino radicali, quotiens, qui exinde oritur, addatur cum eadem illa radice proximè majori: & ſiquidem ſummæ hujus capiatur ſemiſſis ſine fractione, à cujus quadrato ſubducatur radix, de qua agitur, prædictæ quadratorum differentiæ; erit ſemiſſis illa pars rationalis, radix verò quadrata reſidui, inde orti, pars radicalis quæſitæ radicis: iiſdem ſignis afficiendæ, quibus propoſiti binomii termini afficiuntur.

Quod ſi verò terminus rationalis minor fuerit termino radicali, quotiens, qui ex illa diviſione provenit, ſubducatur ex radice illa proximè majori: & ſiquidem reſidui hujus capiatur adhuc ſemiſſis ſine fractione, cujus quadrato addatur radix, de qua agitur, prædictæ quadra-

torum differentiæ ; erit rurſus ſemiſſis illa pars rationalis, radix verò quadrata ſummæ, inde ortæ, pars radicalis quæſitæ radicis: iiſdem quoq, ſignis afficiendæ, quibus propoſiti binomii termini sũt affecti.

Extrahenda ſit igitur radix quinta, ſive quadrato-cubica ex binomio $41 + 29\sqrt{2}$. Quoniam terminus radicalis $29\sqrt{2}$ valet circiter 41 erit totius binomii valor ferè 82, cujus radix quinta proximè major, quæ à vera non amplius, quàm unitatis ſemiſſe differat, erit 3. Capiatur differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii, quæ quum ſit unitas, erit ejus radix quinta ſimiliter unitas; adeoque diviſa radice iſta per 3, fiet quotiens $\frac{1}{3}$. Et quoniam terminus rationalis 41 minor eſt termino radicali $29\sqrt{2}$, ſubtrahatur quotiens ille ex radice proximè majori 3, eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis 1 addatur radix quinta differentiæ quadratorum ex terminis binomii, quæ ſimiliter eſt 1; & erit $1 + \sqrt{2}$ radix quinta quæſita.

Extrahenda ſit etiam radix ſeptima ex binomio $568 + 328\sqrt{3}$. Quoniam terminus

nus radicalis $328\sqrt{3}$ valet circiter 568, erit totius binomii valor ferè 1136, cujus radix ſeptima proximè major, quæ à vera non amplius differat, quàm ſemiſſe unitatis, erit 3. Et quoniam differentia quadratorum ex terminis propoſiti binomii eſt 128, erit 2 radix ejus ſeptima, quæ ſiquidè dividatur per 3, fiet quotiens $\frac{2}{3}$. Unde porrò, quia terminus rationalis 568 minor eſt termino radicali $328\sqrt{3}$, ſubducatur quotiens ille ex radice proximè majori 3, eritque 1 reſidui ſemiſſis ſine fractione. Denique quadrato hujus ſemiſſis, quod eſt etiam 1, addatur radix ſeptima differentiæ quadratorum ex terminis binomii 2; & erit $1 + \sqrt{3}$ radix ſeptima quæſita.

Cæterùm hìc etiam notare oportet, quantitatem, quæ per hanc regulam invenitur, tunc demum eſſe radicem quæſitam, quum hæc ex propoſito binomio extrahi poteſt; pariterque non alia ratione cognoſci poſſe, num propoſitum binomium radicem admittat, quàm ſi rei periculum fiat. Nam etſi, quum differentia quadratorum, quæ fiunt ex terminis propoſiti binomii, nequaquam eſt poteſtas

perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur; indicio nobis eſſe poteſt, propoſitum binomium radicem non admittere: non hinc tamen argumento nobis eſſe debet, quod radicem admittat, quum viciſſim differentia illa prodit illius ordinis poteſtas perfecta.

Sed quod dicimus, radicem ex binomio extrahi non poſſe, quum differentia quadratorum ex terminis ejus non eſt poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur; hoc ita etiam oportet intelligatur, ſi radix extrahenda non alias radicales, quàm quadraticas, debeat continere. Nam ſi qualitatis radicalium nulla ratio haberi velit, extrahi quandoque poterit optata radix etiam ex binomio, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus nequaquam ſit illius ordinis poteſtas perfecta. Etenim ſi termini propoſiti binomii multiplicentur per illius differentiæ poteſtatem aliquam, hoc eſt per quadratum, ſi quæratur radix quinta; per cubum, ſi radix ſeptima; per quadrato-quadratum, ſi radix nona; atque ita deinceps, novum producetur binomium, in quo differentia quadratorum ex terminis ejus poteſtas erit perfecta illius ordinis, de quo agitur: proindeque ſi ex novo iſto binomio radix ex-

extrahatur, eadem diviſa per radicem cognominem illius quantitatis, quæ vices geſſit multiplicatoris, prioris binomii radicem exhibebit.

Atque hoc artificio extrahi etiam quandoque poterit quæſita radix, tum ex binomio, cujus termini fractiones involvant, tum itidem ex binomio, cujus uterque terminus ſit radicalis: ſcilicet ſi multiplicationis ope in primo caſu tollantur fractiones, in ſecundo verò unus ex terminis propoſiti binomii fiat rationalis. Nam in utroque caſu, ſi novi binomii radix illius ordinis, de quo agitur, dividatur per radicem cognominem illius quantitatis, quæ geſſit vices multiplicatoris; erit quotiens hujus diviſionis radix propoſiti binomii: quæ omnia exemplis illuſtrare, ſupervacaneum exiſtimamus; quum non diſſimilia ſint ab iis, quæ in extractione radicis cubicæ ex binomiis paulò ſuperiùs adnotavimus, & exemplis explicuimus.

Illud hìc potiùs oſtendendum exiſtimamus, qua ratione regula ſuperiùs tradita deducatur ex eo, quod ad extrahendam radicem ex propoſito binomio neceſſe ſit, ut in binomio adſint duæ iſtæ conditiones. Primò, ut differentia quadra-

dratorum ex terminis ejus, ſit poteſtas perfecta ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur. Et ſecundò, ut radix hujus differentiæ, ab eadem poteſtate denominata, ſit differentia quadratorum ex terminis extrahendæ radicis.

Hunc in finem referat, ut antea, $a + \sqrt{b}$ radicem extrahendam. Itaque poſito, quod terminus rationalis a major ſit termino radicali $\sqrt{b}$; erit radix prædictæ quadratorum differentiæ $a^2 - b$. Jam verò diviſo $a^2 - b$ per $a + \sqrt{b}$ producitur $a - \sqrt{b}$, quod additum cum $a + \sqrt{b}$, dat ſummam, cujus ſemiſſis eſt pars rationalis a; atque ab hujus quadrato a^2 ſubducto $a^2 - b$, habetur reſiduum, cujus radix quadrata eſt pars radicalis $\sqrt{b}$. Itaque ſi loco ipſius $a + \sqrt{b}$ ſumatur radix binomii proximè major, adhuc eodem artificio quæſitæ radicis partes invenientur.

Quod ſi verò terminus rationalis a minor ſit termino radicali $\sqrt{b}$; erit radix ejuſdem qnadratorum differentiæ $b - a^2$. Jam verò diviſo $b - a^2$ per $a + \sqrt{b}$ producitur $\sqrt{b} - a$, quod ſubtractum ex $a + \sqrt{b}$, dat reſiduum, cujus ſemiſſis eſt pars rationalis a; atque hujus quadrato a^2 addito cum $b - a^2$, habetur ſumma,

ma,

Digitized by Google

ma, cujus quadrata radix eſt pars radicalis $\sqrt{b}$. Itaque ſi loco ipſius $a + \sqrt{b}$ capiatur radix binomii proximè major, eadem operandi ratione, adhuc quæſitæ radicis partes habebuntur.

IV.

Geneſis, & calculus radicalium, quæ dicuntur univerſales.

Est & alia ſpecies quantitatum radicalium, quæ dicuntur univerſales. Oriuntur autem hujuſmodi quantitates radicales, quum ex aliquo binomio, per regulas ſuperiùs traditas, quæſita radix extrahi non poteſt. Nam ſicuti ad deſignandam radicem, quæ ex aliqua quantitate rationali elici nequit, præfigitur quantitati ſignum radicale; ita quoque quum ex aliquo binomio radix quæcumque extrahi non poteſt, deſignatur illa ope ejuſdem ſigni radicalis. Et quoniam ſignum iſtud radicale ad utrumque binomii terminum ſe extendit; hinc factum, ut quantitas illa, radicalis univerſalis ab Algebriſtis diceretur.

Itaque, quia ex quantitate rationali 20 extrahi non poteſt quadrata radix; deſi-

deſignatur illa per $\sqrt{20}$: qua ratione ipſa quantitas rationalis 20 evadit incommenſurabilis, ac radicalis. Et ad eundem modum, quia ex binomio $2+\sqrt{6}$ quadrata radix elici nequit, deſignari ea poterit, adhibito quoque ſigno radicali, quod utrumque binomii terminum comprehendat, in hunc modum $\sqrt{2+\sqrt{6}}$: quo facto quantitas iſta $\sqrt{2+\sqrt{6}}$ dicetur radicalis univerſalis. Pariterque, ſicuti quum quæritur radix cubica quantitatis rationalis 10, oritur quantitas radicalis $\sqrt[3]{10}$; ita quoque quum quæritur radix cubica binomii $1+\sqrt{2}$, habetur radicalis univerſalis $\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}$.

Hujuſmodi quantitates radicales, rarò accidit, ut ad calculum poni debeant. Interim ne quum id contingit, Tyrones noſtri animo concidant, ſciant velim, calculum ipſarum iiſdem omnino regulis peragi poſſe, quibus aliarum radicalium calculus perficitur. Itaque primò ad deſignandum duplum, triplum, aut quadruplũ radicalis univerſalis $\sqrt{2+\sqrt{6}}$, ſcribendum eſt $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$, $3\sqrt{2+\sqrt{6}}$, $4\sqrt{2+\sqrt{6}}$. Sed quantitates illæ, extra ſignum exiſtentes, quæ hìc etiam dicuntur coef-

Digitized by Google

coefficientes, reponentur intra ſignum radicale, ſi evectæ ad poteſtatem, ab exponente ſigni radicalis deſignatam, multiplicentur per omnes illas, quæ ſub ſigno reperiuntur: qua ratione $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$, idem erit, ac $\sqrt{8+4\sqrt{6}}$, ſive $\sqrt{8+\sqrt{96}}$.

Secundò radicales iſtæ univerſales ad ſimpliciores ſuos terminos reducuntur, collocando extra ſignum quicquid rationale ſimul, & commune eſt in quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus; ſed ad id faciliùs cognoſcendum, præſtat priùs ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocare quantitates radicales, quæ ſub ſigno univerſali reperiuntur. Ut ſi velim ad ſimpliciores ſuos terminos reducere radicalem univerſalem $\sqrt{8+\sqrt{96}}$, quia hæc idem eſt, ac $\sqrt{8+4\sqrt{6}}$; & in numeris 8, & 4, quod eſt rationale ſimul, & commune, eſt ipſe numerus 4: proinde diviſo utroque eorum numerorum per 4, & collocata extra ſignum radice ejuſdem numeri 4, erit $2\sqrt{2+\sqrt{6}}$ quantitas propoſita, ad ſimpliciores ſuos terminos reducta.

Jam reducendo radicales univerſales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, facile erit eas in unum addere, vel à ſe mutuò ſub-

ſubducere. Nam ſiquidem contigerit, radicales illas univerſales eaſdem ſub ſignis radicalibus quantitates habere; fiet earum additio, vel ſubtractio, addendo, vel ſubtrahendo earundem coefficientes. Quod ſi verò ſub ſignis radicalibus nequaquam habeant eaſdem quantitates, deſignari poterit additio, vel ſubtractio, adhibito ſigno $+$, vel $-$. Hac ratione ſumma, vel reſiduum, quod oritur ex additione, vel mutua ſubtractione radicalium univerſalium $\sqrt{50 + \sqrt{3750}}$, & $\sqrt{8 + \sqrt{96}}$ erit $7\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, vel $3\sqrt{2 + \sqrt{6}}$; quia ſi utique ad ſimpliciores ſuos terminos eæ reducantur, fient $5\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, & $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$. Sed ſumma, vel reſiduum, quod oritur ex additione, vel ſubtractione mutua radicalium univerſalium $\sqrt{8 + \sqrt{96}}$, & $\sqrt{4 + \sqrt{32}}$, non aliter deſignari poteſt, quàm adhibito ſigno $+$, vel $-$; quia ſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones revocentur, una fit $2\sqrt{2 + \sqrt{6}}$, altera $2\sqrt{1 + \sqrt{2}}$.

Multiplicatio porrò, & diviſio hujuſmodi quantitatum radicalium fieri poſſunt, etiamſi ad ſimpliciores ſuas expreſſiones illæ non reducantur. Nam ſiquidem

dem multiplicentur, aut dividantur per ſe mutuò quantitates, ſub ſignis exiſtentes, & producto, vel quotienti idem radicale ſignùm præſigatur; quæ inde oritur radicalis univerſalis, dabit productũ, vel quotientem quæſitum. Ut ſi oporteat multiplicare $\sqrt{3+\sqrt{3}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; multiplico primùm $3+\sqrt{3}$ per $2+\sqrt{2}$; tum producto $6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}$, præfigo idem ſignũ radicale; & erit $\sqrt{6+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ productum, quod quæritur. Similiter ſi oporteat dividere $\sqrt{4+\sqrt{6}}$ per $\sqrt{2+\sqrt{2}}$; divido primùm $4+\sqrt{6}$ per $2+\sqrt{2}$, vel quod idem eſt $8+2\sqrt{6}-4\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ per 2; tum quotienti $4+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}$ præfigo idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{4+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ quotiens, qui quæritur.

Interim tam in additione, & ſubtractione, quàm in multiplicatione, & diviſione hujuſmodi quantitatum radicalium, illud requiritur, ut quantitates, in quibus operationes illæ inſtitui debent, ſint ejuſdem denominationis, hoc eſt idem habeant ſignum radicale. Unde ſi quantitates offerantur diverſæ denominationis, neceſſe eſt, ut illæ priùs ad eandem

Digitized by Google

dem denominationem reducantur. Hæc autẽ reductio fit eodem omnino artificio, ac reductio radicalium ſimplicium: nimirum, elevando quantitatem, ſub cujuſque ſigno exiſtentem, ad poteſtatem à ſigno alterius denominatam; & proprium cujuſque ſigni indicem multiplicando per indicem alterius: vel etiam, ſi index unius ſigni exactè contineatur in indice alterius ſigni, multiplicando indicem illum per numerum, qui oſtendit, quoties in hoc altero continetur; & elevando quantitatem, ſub eodem illo ſigno exiſtentem, ad poteſtatem, ab eodem numero denominatam.

Quantum ad formationem poteſtatum in hujuſmodi quantitatibus radicalibus, fieri illa quoque poteſt, abſque ulla earum quantitatum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reductione. Nam ſi ad datam poteſtatem attollantur quantitates, ſub ſigno exiſtentes, iiſq; idem radicale ſignũ præfigatur, habebitur propoſitæ radicalis univerſalis poteſtas quæſita. Ita ſi oporteat, ad quadratum attollere radicalem univerſalem $\sqrt{a + \sqrt{c}}$; fiat primò quadratum ex $a + \sqrt{c}$; tum huic præfigatur idem ſignũ radicale; & erit $\sqrt{a + c + 2\sqrt{ac}}$ qua-

quadratum quæſitum. Similiter ſi oporteat, ad cubum evehere eandem radicalem univerſalem $\sqrt{a + \sqrt{c}}$; fiat primò cubus ex $a + \sqrt{c}$; deinde huic idem ſignũ radicale præfigatur; & erit $\sqrt{a^3 + 3a^2\sqrt{c} + 3ac + c\sqrt{c}}$ cubus quæſitus.

Denique, quantum ad radicum extractionem ex iiſdem quantitatibus radicalibus, ad eam peragendam neque etiam ulla requiritur reductio earum quantitatum ad ſimpliciores ſuas expreſſiones. Nam ſiquidem ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtẽtibus, quæſita radix extrahatur, eiq; idem radicale ſignũ præfigatur, habebitur propoſitæ radicalis univerſalis radix quæſita. Ita ſi oporteat, quadratam radicem extrahere ex radicali univerſali $\sqrt{{}^{3}\,3 + 2\sqrt{2}}$; eliciatur primò quadrata radix ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $3 + 2\sqrt{2}$; tum huic præfigatur idem ſignum radicale; & erit $\sqrt{{}^{3}\,1 + \sqrt{2}}$ radix quadrata quæſita. Similiter ſi oporteat, radicem cubicam elicere ex radicali univerſali $\sqrt{7 + 5\sqrt{2}}$; eliciatur primò radix cubica ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $7 + 5\sqrt{2}$; deinde huic idem radicale ſignũ præfigatur; & erit $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ radix optata.

N Quod

Quod ſi ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, optata radix elici nequeat; tunc ſatis erit, multiplicare expo- nentem ſigni radicalis per exponentem quæſitæ radicis. Hoc pacto, ſi quæratur quadrata radix radicalis univerſalis $\sqrt[3]{2+\sqrt{6}}$, ea præcedenti methodo haberi non poteſt; quia ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, $2+\sqrt{6}$ nequaquam licet quadratam radicem elicere: quocirca multiplicato exponēte ſigni radicalis 3 per exponentem quæſitæ radicis 2, fiet $\sqrt[6]{2+\sqrt{6}}$ radix quæſita. Et ſimiliter ſi ex radicali univerſali $\sqrt{1+\sqrt{2}}$, quæratur radix cubica; quia ea per regulam ſuperiùs traditam nequit haberi, quum elici non poſſit cubica radix ex quantitatē, ſub ſigno exiſtente, $1+\sqrt{2}$: proinde multiplicato exponente ſigni radicalis 2 per exponentem quæſitæ radicis 3 fiet $\sqrt[6]{1+\sqrt{2}}$ radix optata.

Cæterùm illud hìc reticere nolim, quod beneficio radicalium univerſalium extrahi poſſit quadrata radix ex quocumque binomio, eâdem illâ regulâ, quam ſuperiùs attulimus. Oporteat enim quadratam radicem elicere ex binomio $8+\sqrt{32}$. Quoniam differentia quadratorum ex

ter-

terminis ejus eſt 32, erit $4\sqrt{2}$ quadrata radix hujus differētiæ. Unde ſi ea addatur primò termino rationali 8, deinde verò ex eodem ſubducatur; erit $4 + 2\sqrt{2}$ ſummæ ſemiſſis, & $4 - 2\sqrt{2}$ ſemiſſis reſidui; proindeque quadrata radix propoſiti binomii erit $\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$.

Sed fateamur etiam hoc loco oportet, quod exhibendo quæſitam radicem in hunc modum, multò difficiliùs, qui ſit valor ejus, intelligatur, quàm ſi utique dicamus, eam extrahi non poſſe, & conſequenter eandem exhibeamus per unicam radicē univerſalem hac ratione $\sqrt{8 + \sqrt{32}}$. Extrahendo namque radices ex binomiis, non aliud efficimus, quàm radicales univerſales ad ſimpliciores ſuas expreſſiones reducere. Quocirca, quotieſcumque ope illarum extractionum radicales illæ terminis magis compoſitis oriuntur expreſſæ, fruſtra quidem inſtituuntur; quum hac ratione potiùs contrarium ejus obtineatur, quod nobis erat in votis.

Interim, ſi quemadmodum radix binomii $8 + \sqrt{32}$ exhiberi poteſt per radices, quæ eliciuntur ex his aliis duobus binomiis $4 + 2\sqrt{2}$, & $4 - 2\sqrt{2}$; ita & unaquæque iſtarum radicum exhibeatur

per radices, quæ ex aliis duobus binomiis elici debeant, res fiet haud aſpernanda; quum hac ratione radicalis univerſalis $\sqrt{8 + \sqrt{32}}$ ad ſimpliciores ſuos terminos reducatur. Radix namque binomii $4 + 2\sqrt{2}$ exhiberi poteſt per $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, & radix binomii $4 - 2\sqrt{2}$ per $\sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$. Itaque radix binomii $8 + \sqrt{32}$ erit $\sqrt{2 + \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 + \sqrt{2}} - \sqrt{2 - \sqrt{2}}$, hoc eſt $2\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

CAP. X.

De quantitatibus imaginariis.

Radices ex quantitatibus extrahi non poſſunt, non modò quia quantitates illæ non ſunt poteſtates perfectæ ejus ordinis, de quo agitur; verùm etiam, quia tali ſigno afficiuntur, ut qua ratione produci queant, intelligi non poſſit. Sic radix quadrata quantitatis ab haberi non poteſt, quia ſcilicet quantitas ipſa ab non eſt quadratum perfectum. Sed radix quadrata quantitatis $-a^2$ neque etiam poteſt haberi, quia quantitas iſta, veluti ſigno − affecta, intelligi non poteſt, qua ra-

ratione producatur ; quum ex regulis multiplicationis ſuperius traditis, tam quantitas poſitiva a, quàm quantitas negativa $-a$, ſi ſemel in ſe multiplicentur, producant quantitatem poſitivam a^2.

Hunc in finem facienda eſt diſtinctio inter poteſtates numeri paris, & poteſtates numeri imparis. Iſtæ etenim poſſunt eſſe tam poſitivæ, quàm negativæ ; quia ſicuti oriuntur poſitivæ, quum radices, ad quas referuntur, ſunt itidem poſitivæ; ita quoque prodeunt negativæ, quum viciſſim radices aſſumuntur negativæ. Sed illæ nonniſi poſitivæ eſſe poſſunt ; quia tam quantitatum poſitivarum, quàm quantitatum negativarum poteſtates numeri paris poſitivæ ſemper oriuntur. Hac ratione cubus quantitatis poſitivæ a eſt quantitas itidem poſitiva a^3 ; & cubus quantitatis negativæ $-a$ eſt quantitas ſimiliter negativa $-a^3$. Sed quadratum tam quantitatis poſitivæ a, quàm quantitatis negativæ $-a$ eſt ſemper quantitas poſitiva a^2 ; quia, ſive multiplicetur a per a, ſive $-a$ per $-a$ producetur ſemper a^2.

Unde diſcimus primò, radices ex poteſtatibus numeri imparis extrahi poſſe, quocumque ſigno ſint affectæ, hoc eſt, ſi-

ve ſint poſitivæ, ſive negativæ; ſed non itē radices ex poteſtatibus numeri paris, quippe quæ tunc demum extrahi poſſunt, quum poteſtates ipſæ ſunt poſitivæ. Et ſecundò quemadmodum clarè liquet, radices, quæ referuntur ad poteſtates numeri imparis, eſſe ſemper ejuſdem naturæ cum ipſis poteſtatibus, nimirum eſſe poſitivas, vel negativas, prout poteſtates ipſæ ſunt poſitivæ, vel negativæ; ita quoque non obſcurè deducitur, poteſtates poſitivas numeri paris duas radices habere, unam nempe poſitivam, & alteram negativam; quum tam illius, quàm iſtius poteſtas numeri paris ſit ſemper quantitas poſitiva.

Itaque impoſſibilitas, quæ in extrahendis radicibus occurrit, oriri poteſt, non ſolùm ex eo, quod quantitas propoſita non ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur; verùm etiam, quia quantitas eſt negativa, & quæſita radix refertur ad poteſtatem numeri paris. Utroque caſu deſignant Algebriſtæ radicem extrahendam, præfigendo quantitati ſignum radicale, cuius index radicem illam oſtendat. Sed quemadmodum impoſſibilitas, quæ oritur ex primo capite, occaſionem præbuit, ut diſtinguerentur

quan-

quantitates in commenſurabiles ſive rationales, & incommenſurabiles ſive radicales; ita ex impoſſibilitate, quæ oritur ex ſecundo capite, nata eſt alia quantitatum diſtinctio: nimirum, quod quædam ſint reales, ſive verè, ac realiter exiſtentes; quædam imaginariæ, hoc eſt, quæ tantùm fingi poſſunt, & imaginari.

Dicuntur ergo quantitates imaginariæ, radices numeri paris, quæ extrahi debent ex quantitatibus negativis; eæque tale nomen apud Algebriſtas ſortitæ ſunt, quia ſcilicet ſunt quantitates, quæ verè, ac realiter non exiſtunt, ſed tantùm finguntur, ac imaginantur. Jam ſi vulgus conſulas Algebriſtarum, non aliam apud ipſos de impoſſibilitate harum radicum rationem invenies, quàm quia intelligi non poteſt, quo ſigno affici debeant, ut producant poteſtates, ad quas referuntur. Sed quoniam hæc ratio convincit nos potiùs, quàm illuminat; aliam nos hìc afferre conabimur, quæ harum radicum impoſſibilitatē ad oculū nobis oſtēdat. Quumq;ratio iſta ex natura quantitatum poſitivarum, & negativarū, velut ex proprio ſuo fonte,ſit deducenda; hāc priùs oportet paulò clariùs oſtēdamus.

I.

Natura quantitatum poſitivarum, & negativarum paulò clariùs oſtenditur.

DIximus ſecundo capite, quantitates poſitivas eſſe illas, quas ſignum + præcedit; quantitates verò negativas, quæ ſigno — afficiuntur. Sed eodem in loco explicuimus etiam, qua ratione intelligendum ſit illud, quod vulgò dicunt Algebriſtæ, quantitates poſitivas eſſe nihilo majores, quantitates negativas nihilo minores: nimirum, quod quum zero, ſive nihilum quantitatibus additum, earum valorem nec augeat, nec minuat; dicendum ſit nihilo majus, quod potis eſt alicujus quantitatis valorem augere; & viciſſim nihilo minus, quod quantitatis alicujus valorem minuere poteſt: adeo, ut quantitates dicendæ ſint poſitivæ, vel negativæ, non quidem propter ſe, ſed in ordine ad eas, de quibus valorem ſuum affirmant, vel negant.

Jam hæc facilè quidem intelliguntur, quotieſcumque quantitates, quæ dicuntur negativæ quãtitatibus aliis poſitivis, iiſ-

iiſque majoribus, adhærent; ſed non ita facilè concipi poſſunt, quum eædem quantitates negativæ, vel ſolæ ponuntur, vel quantitatibus aliis adhærent, quæ etſi ſint poſitivæ, iis tamen ſunt minores. Nemo etenim non intelligit quid ſignificet expreſſio iſta 7 — 5; quandoquidem per eam valor numeri 5 negatur de valore numeri 7; atque adeo tantùm indicatur valor numeri 2. Sed quid ſibi velit hæc altera expreſſio — 2, vel etiam 5 — 7, non ità liquidò conſtat; quum in prima negatio valoris numeri 2 ad nullam quantitatem referatur; in ſecunda quantitas, quæ negatur, 7 major ſit illa, de qua negatur, 5.

Itaque illud hìc oportet oſtendamus, qua ratione fieri poſſit, ut quantitates negativæ, vel ſolæ reperiantur, vel aliis adhæreant, poſitivis quidem, ſed majoribus ipſis. Id explicant primò Algebriſtæ mediantibus debitis, & creditis. Quemadmodum etenim credita ſunt bona affirmativa, quia peculium augent; ita debita conſiderari poſſunt veluti bona negativa, quia peculium minuunt. Unde ſicuti, quum quis centum habet crediti, quadraginta verò debiti, dicimus peculium ejus eſſe 100 — 40; ita viciſſim

quum

quum habet quadraginta crediti, centum verò debiti, dici poteſt, quod peculium ejus ſit 40 — 100. Et ſimiliter ſicuti quum habet centum crediti, nihil verò debiti, dicimus peculium ejus eſſe 100; ita viciſſim, quum habet centum debiti, nihil verò crediti, dici poteſt, quod peculium ejus valeat — 100.

Hoc idem explicant quoque motu locali, in quo progreſſus dici poteſt motus poſitivus, quia auget iter confectum, & minuit conficiendum; regreſſus motus negativus, quia viciſſim minuit iter confectum, augetque conficiendum. Si enim



aliquem promoveri ſupponamus ab A verſùs B pedibus quinque, atque tum retrocedere à B ad C pedibus tribus, dicemus promotiorem reperiri in C, quàm in A pedibus 5 — 3; ſed ſi retrocedat à B ad D pedibus ſeptem, tùnc dici poteſt, promotiorem eſſe in D, quam in A pedibus 5 — 7. Et ſimiliter, ſi aliquis iter confecturus ab A verſus B, proceſſerit ab A ad C pedibus duobus, dicemus reſpectu itineris conficiendi promotiorem eſſe in

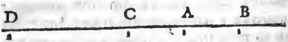
Digitized by Google

in C, quàm in A pedibus 2; ſed ſi viciſſim retroceſſerit ab A ad D pedibus duobus, tunc dici poterit, quod promotior ſit ille in D, quàm in A pedibus — 2.

Utroque hoc exemplo illud clarè liquet, quantitates, quæ dicuntur negativæ, non minùs reales eſſe, quàm quæ vocantur poſitivæ; ſed omne diſcrimen inter eas in eo poſitum eſſe, quod quantitates negativæ interpretandæ ſint ſenſu contrario ei, quo poſitivas quantitates interpretamur. Nam ſicuti quum dicimus, peculium alicujus eſſe 60, intelligimus illud tantundem in bonis habere, ut ſexaginta perſolvere poſſit; ita quoque quum dicimus alicujus peculium valere — 60, intelligimus viciſſim ab eo abeſſe ſexaginta, quo dici poſſit in neutro ſtatu conſiſtere. Et ſimiliter ſicuti quum dicimus, aliquem dati itineris pedum decem confeciſſe pedes 4, ſenſus eſt, eum in tali loco verſari, ut illius itineris nonniſi ſex pedes conficere debeat; ita quoque quum dicimus dati itineris pedum decem confectos eſſe ab aliquo pedes — 4, illud ita oportet intelligatur, ut conficere debeat pedes quatuordecim, quò ad præfixam perveniat metam.

Hac igitur ratione in Geometria, ubi quan-

quantitates per longitudines linearum deſignantur, ſi linea verſus plagam aliquam ducta, habeatur tamquam poſitiva, erit negativa, quæ verſus plagam oppoſitam ducitur. Ut ſi ab eodem puncto A ducatur verſus dextram recta li-



nea AB, & verſus ſiniſtram recta linea AC; poſito, quod prior AB ſit poſitiva, altera AC pro negativa habenda erit. Atque hac ratione, lineas negativas minuere valorem poſitivarum, perſpicuum quidem eſt. Nam quemadmodum lineæ poſitivæ DA addendo lineam ſimiliter poſitivam AB, conficitur DB, major quidem, quàm DA; ita ſi eidem lineæ poſitivæ DA addatur linea negativa AC, conficietur DC minor quidem, quàm DA. Quin etiam ſicuti clarè liquet, lineam poſitivam DA per appoſitionem negativæ AC omnino in nihilum redigi, ſi fuerit AC æqualis ipſi DA; ita liquidò patet, eandem lineam poſitivam DA per appoſitionem ejuſdem lineæ negativæ AC negativam evadere, ſi fuerit AC major quidem, quàm DA.

Eadem ratione in Arithmetica, ubi

quan-

quantitates per numeros exprimuntur, quemadmodũ numeri, qui à zero progrediuntur, dicuntur poſitivi: ita dicẽdi ſunt negativi, qui viciſſim à zero regrediuntur. Unde, quia iſte numerorum à zero regreſſus omnino opponitur progreſſui, manifeſtum eſt etiam, numeros negativos, additos numeris poſitivis, eorum valorem mĩnuere debere: proindeque expreſſio iſta 7 — 5 non ampliùs valere debet, quàm 2. Atque hac ratione perſpicuum eſt quoque, numeros poſitivos per negativorum additionem poſſe omnino in nihilum redigi, ſi ſcilicet numeri negativi æquales fuerint poſitivis; quin etiam in negativos abire, ſi viciſſim negativi majores fuerint poſitivis.

Sed qua demum ratione numeri negativi poſſint eſſe perinde reales, ac poſitivi, ſcio equidem non ita facilè concipi poſſe. Numerorum quippe ea videtur eſſe natura, ut omnes à zero progrediantur: proindeque tamquam omnino fictitii habendi ſunt numeri illi, qui viciſſim à zero regrediuntur. Et ſanè Veteres de Algebra ſcriptores, qui eam tantùm in numeris excolebant, in hac erant opinione, ut numeri negativi, utpote nihilo minores, eſſent falſi, ac planè fictitii; & proin-

proinde, ut indicio eſſet, problemâ propoſitum ſolutu impoſſibile eſſe, quum in ejus ſolutione hujuſmodi occurrent numeri: qua in re numerorum naturam, ac indolem videntur non rectè intellexiſſe.

Numeri quippe dupliciter conſiderari poſſunt, vel ſcilicet in abſtracto, quatenus in ideis noſtræ mentis exiſtunt; vel in concreto, quatenus rebus phyſicis, ac realibus deſignandis applicantur. Priori modo, non ſolùm nulli ſunt numeri negativi, ſed neque etiam ulli numeri fracti; quia ſicuti in ideis noſtræ mentis omnes numeri à zero progrediuntur, ſic & quilibet numerus eſt major unitate, utpote quæ velut principium omnis numeri concipitur. At ſi ſecundo modo conſiderentur, quemadmodum, præter numeros integros, diſtinguuntur etiam numeri fracti, quippe qui ſunt una, vel plures partes illarum, in quas dividitur totum, quod unitas repræſentat; ita quoque, præter numeros poſitivos, diſtinguendi ſunt etiam numeri negativi, ut ſcilicet per eos deſignetur hypotheſis contraria ei, quam deſignant numeri poſitivi.

Jam dici nequit, Veteres Algebriſtas Id-

idcirco numeros negativos pro falſis, ac planè fictitiis habuiſſe, quia numeros conſideraverint in abſtracto, & non in concreto; quandoquidem eadem ratione à contemplatione numerorum fractos etiam rejicere debuiſſent. Quocirca quum veriti non fuerint, numeros in integros, & fractos diſpeſcere; fatendum eſt, eos conſideraſſe numeros in concreto, & non in abſtracto; nec proinde culpâ vacare, quod negativorum numerorum realitatem non agnoverint. Sunt itaque numeri negativi perinde reales, ac poſitivi; & omne diſcrimen inter eos in eo conſiſtit, quod per numeros negativos deſignetur rerum realium ſtatus, ſive hypotheſis una; per numeros negativos earumdem rerum ſtatus, ſive hypotheſis contraria.

Ex hac autem quantitatum poſitivarum, & negativarum idea regulæ additionis, & ſubtractionis, nempe quod additio fieri debeat iiſdem ſignis, ſubtractio ſignis omnino mutatis prono alveo profluunt. Nam quemadmodum additione poſitivi poſitivum quidem augetur, negativum verò minuitur; ita viciſſim additione negativi, augetur quidem negativum, ſed minuitur poſitivum.

Et

Et ſimiliter ſicuti ſubtractione poſitivi, poſitivum minuitur, negativum augetur; ita ſubtractione negativi, poſitivum augetur, negativum verò minuitur. Sed exinde non obſcurè colligi quoque poſſint regulæ multiplicationis, & diviſionis: nempe, quod productum, vel quotiens tunc demum affici debeant ſigno —, quùm quantitates ad multiplicandum, vel dividendum propoſitæ contrariis ſignis afficiuntur.

Vera etenim multiplicationis idea hæc eſt, ut quantitas multiplicanda toties collocari debeat in ſtatu, à multiplicatore deſignato, quot partes continet ipſe multiplicator: adeo, ut quantitas illa, quæ vices gerit multiplicatoris, non ſolùm oſtendat, quoties multiplicanda quantitas ſumi debeat, verùm etiam in quo ſtatu ſit collocanda. Et ſimiliter vera notio diviſionis eſt, ut quantitatis dividendæ ea pars collocari debeat in ſtatu, deſignato à diviſore, quam diviſor ipſe denominat: adeò, ut quantitas illa, quæ locum tenet diviſoris, non ſolùm indicet, quæ pars ex quantitate dividenda ſumi debeat, verùm etiam in quo ſtatu pars illa ſit reponenda. Quocirca quia in utraque operatione ſtatus iſte intelligi debet in or-

ordine ad eum, in quo jam reperitur; ſi utique quantitas ſit negativa, eademque reponi debeat in ſtatu negativo, reponenda erit in ſtatu, qui ſit negativus negativi, hoc eſt in ſtatu poſitivo: & proinde id, quod oritur ex multiplicatione, vel diviſione duarum quantitatum negativarum, erit poſitivum, & non negativum.

II.

Quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, impoſſibilitas oſtenditur.

Natura quantitatum poſitivarum, & negativarum paulò clariùs explicata, haud difficile modò erit, oſtendere impoſſibilitatem earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ. Hunc in finem præmittendum eſt primò, radicum extractiones perfici poſſe, inveniendo inter duas datas quantitates unam, aut plures medias proportionales: nempe unam, quum extrahenda eſt radix quadrata; duas, quum extrahenda eſt radix cubica; tres, quum quæritur radix quadrato-quadrata; atque ita deinceps. Quod ne Tyrones noſtros offendat, illud hìc oſtendere non gravabimur.

Digitized by Google

Et primò quidem in extractione radicis quadratæ notum eſt, talem inveniendam eſſe quantitatem, ut quadratum ejus quantitatem propoſitam producat. Itaque, ſi ab ſit data quantitas, extrahetur ex illa quadrata radix, ſi hujuſmodi inveniatur quantitas, ut ex multiplicatione ejus in ſe ipſam oriatur quantitas data ab. Jam verò, ſi x ſit media proportionalis inter a, & b, quadratum termini medii x æquale erit ei, quod ex extremorum a, & b multiplicatione producitur. Quare extrahetur ex ab quadrata radix, ſi inveniatur media proportionalis inter quantitates a, & b, ex quarum mutua multiplicatione producitur data quantitas ab.

Secundò in extractione radicis cubicæ perſpicuum eſt, talem inveniendam eſſe quantitatem, ut cubus ejus quantitatem propoſitam producat. Quocirca, ſi a^2b ſit data quantitas, extrahetur ex illa radix cubica, ſi talis inveniatur quantitas, ut multiplicando eam bis in ſe ipſam, oriatur data quantitas a^2b. Jam verò, ſi x ſit prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, & b, & y ſecunda; erit a^2 ad x^2, ut a ad y, ſive ut x ad b; & propterea x^3, hoc eſt cubus ipſius x æqualis ei, quod producitur, multiplicando a^2 per b. Ita-

b. Itaque extrahetur ex a^2b cubica radix, ſi capiatur prima ex duabus mediis proportionalibus inter a, & b.

Tertiò in extractione radicis quadrato-quadratæ talem oportet quantitatem invenire, ut ejus quadrato-quadratum quantitatem propoſitam reſtituat. Itaque, ſi a^3b ſit data quantitas, extrahetur ex illa radix quadrato-quadrata, ſi hujuſmodi inveniatur quantitas, ut multiplicando eam ter in ſe ipſam, oriatur data quantitas a^3b. Jam verò, ſi ex tribus mediis proportionalibus inter a, & b, x ſit prima, y ſecunda, & z tertia; a^3 erit ad x^3, ut a ad z, ſive ut x ad b; & propterea x^4, hoc eſt quadrato-quadratum ipſius x, æquale erit ei, quod gignitur, multiplicando a^3 per b. Quare extrahetur ex a^3b radix quadrato-quadrata, ſi capiatur prima ex tribus mediis proportionalibus inter a, & b.

Non diſſimiliter oſtendetur, inveniendas eſſe quatuor medias proportionales in extractione radicis quintæ, quinque in extractione radicis ſextæ, ſex in extractione radicis ſeptimæ, atque ita deinceps. Pendent autem hæc omnia generaliter ex hoc theoremate, quod ſi fuerint quotcumque quantitates continuè pro-

portionales, ea ſecundæ poteſtas, quam deſignat numerus omnium una dempta, æqualis ſit ei, quod producitur, multiplicando poteſtatem primæ proximè minorem per ultimam. Ut ſi fuerint, exempli cauſa, decem quantitates continuè proportionales, nona poteſtas ſecundæ æqualis ſit ei, quod oritur, multiplicando octavam poteſtatem primæ per ultimam.

Jam, quum problemata de radicibus extrahendis non differant ab iis, in quibus unam, aut plures medias proportionales inter duas datas quantitates oportet invenire; non alia meliori ratione oſtendi poterit impoſſibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, quàm oſtendendo inter quantitatem poſitivam, & negativam poſſe quidem duas, quatuor, aut ſex medias proportionales inveniri; ſed non item unam, tres, aut quinque. Oriuntur etenim quantitates imaginariæ, quum radices ſunt extrahendæ ex quantitatibus negativis, quæ conſiderãtur tamquam poteſtates numeri paris. Itaque, quia in extrahendis radicibus, quæ ad has poteſtates referuntur, inveniendæ ſunt una, tres, aut quinque mediæ proportionales; oſtendetur, radices

illas

illas extrahi non poſſe, quum quantitates ſunt negativæ, ſi utique oſtendi poſſit inter quantitatem poſitivam, & negativam unam, tres, aut quinque medias proportionales nequaquam poſſe reperiri.

Ad hoc autem oſtendendum neceſſe eſt, certum ſtatuere criterium, quo mediante nullo negotio cognoſci poſſit, num quatuor quantitates ſint proportionales, necne. Neque enim ea, quæ paſſim afferuntur, poſſunt huic rei oſtendendæ uſui nobis eſſe; quippe quæ ſupponunt omnia, quantitates, quæ inter ſe mutuò comparantur, eſſe unius ejuſdemque generis, ſive ſtatus, hoc eſt, vel omnes poſitivas, vel omnes negativas. Oportet igitur, ut aliud ſtatuamus criterium, quod certiſſimum, & evidentiſſimum, etiam ad quantitates diverſi ſtatus ſe extendat: quod quum hactenus non modo à nemine, quem ſciam, ſit tentatū, ſed neq; etiam ab ullo ſomniatum; hinc factum, ut doctrina iſta ſemper difficultatibus, iiſque graviſſimis, fuerit involuta.

Et quidem quia vera notio proportionis hæc eſt, ut tunc quidem dicendæ ſint proportionales quatuor magnitudines, ſive quantitates, quotieſcumque antece-

dentes reſpectu ſuorum conſequentium eadem lege progrediuntur ; non aliud tamquam criterium certum proportionis ſtatui poterit, quàm ut dicamus, proportionales eſſe quatuor quantitates, quotieſcumque quicquid efficitur ab uno antecedentium, ut conſequentem ſuum adæquet, id omne fieri debeat ab alio antecedente, ut adæquet quoque ſuum conſequentem. Atque hoc quidem criterium adeo certiſſimum, & evidentiſſimum mihi videtur, ut crediderim obſcurari potius, quàm illuſtrari, ſi fuſiori oratione veritatem ejus oſtendere vellem ; quippe quod ex ipſa proportionis idea ſponte ſua conſequitur.

Hujus itaque criterii ope diſcimus primò, quatuor quantitates 2, 6, — 4, — 12 proportionales eſſe ; quia ſicuti antecedens 2 ſumi debet ter in ſtatu ſuo, quò conſequentem, ad quem refertur, adæquet ; ita antecedens alter — 4 ſumendus eſt etiam ter in ſtatu ſuo, quo poſſit ſuum ſimiliter conſequentem adæquare. Diſcimus ſecundò proportionales eſſe etiam, tam quantitates 2, — 6, 4, — 12, quàm quantitates — 2, 6, — 4, 12 ; quia in utraque analogia ſicuti antececedens unus ſumi debet ter in ſtatu contra-

trario, ut conſequentem ſuum adæquet; ita antecedens alter ſumendus eſt ter in ſtatu contrario, quo ſuum etiam conſequentem adæquet. Atque ita quoque diſcimus tertiò proportionales eſſe, tam quantitates 2, — 6, — 4, 12, quàm quantitates — 2, 6, 4, — 12; quandoquidem in utraq: proportione ambo antecedẽtes ſumi debent ter in ſtatu contrario, quo ſuos poſſint conſequentes adæquare.

Diſcimus, inquam, uno verbo illius criterii ope, quod ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, qua quantitates, proportio earum non perturbetur, ſi duæ quævis ſumantur unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus oppoſiti. Sed ejuſdem criterii ope diſcimus quoque, proportionem quatuor quantitatum alterari, ſi tres quidem ſumantur unius ſtatus, & quarta ſtatus contrarii. Neque enim ſubſiſtit hæc analogia, ut 2 ad 6, ita 4 ad — 12, multòque minùs hæc alia, ut — 2 ad — 6, ita — 4 ad 12; quandoquidem in utraque antecedens unus ſumi debet ter in ſtatu ſuo, quo ſuum conſequentem adæquet; quum tamen antecedens alter ſumendus eſt ter in ſtatu contrario, quo ſuum ſimiliter conſequentem poſſit adæquare.

Subſiſtit itaque proportio inter quantitates diverſi ſtatus, ſi ſervantes legem proportionis, qua quantitates, duæ fuerint unius ſtatus, & aliæ duæ ſtatus contrarii. Unde modò ſponte ſua conſequitur, inter quantitatem poſitivam, & negativam poſſe quidem duas, quatuor, aut ſex medias proportionales inveniri, ſed non item unam, tres, aut quinque; atque adeo radices extrahi quidem poſſe ex poteſtatibus negativis numeri imparis, ſed non item ex poteſtatibus negativis numeri paris. Nam, quotieſcumque inter quantitatem poſitivam, & negativam duæ mediæ proportionales proponuntur inveniendæ, poterit illarum una eſſe negativa, altera poſitiva; ac propterea inter quantitates diverſi ſtatus proportio conſiſtere. Sed, quum una tantùm media proportionalis proponitur invenienda, quia ea eſſe debet, vel poſitiva, vel negativa; jam ex quatuor terminis tres erunt unius ſtatus, & quartus ſtatus contrarii; nec proinde inter eos ulla poterit eſſe proportio.

Ut ſi velim, exempli cauſa, inter quantitatem poſitivam 2, & quantitatem negativam — 16 duas medias proportionales invenire, earum una erit —4, al-

altera 8. Nam ſicuti prima, ut conficiat ſecundã, ſumi debet bis in ſtatu contrario; ita ſecunda, ut conficiat tertiam, & tertia, ut conficiat quartam, ſumendæ ſunt etiam bis in ſtatu oppoſito ei, in quo jam reperiuntur. Sed, ſi inter quantitatem poſitivam 2, & quantitatem negativam — 8 quæratur una tantùm media proportionalis, ea exhiberi non poterit. Nam vel aſſumitur poſitiva 4; & prima quidem ſumi debet bis in ſtatu ſuo, ut conficiat ſecundam; ſecunda verò bis in ſtatu oppoſito, ut conficiat tertiam. Vel aſſumitur negativa — 4; & viciſſim prima ſumenda erit bis in ſtatu contrario, quo ſecundam adæquet; ſecunda verò bis in ſtatu ſuo, quo poſſit tertiam adæquare.

Eadem omnino ratione oſtendetur quoque, inter quantitatem poſitivam, & negativam poſſe quidem quatuor, ſex, aut octo medias proportionales inveniri, ſed non item tres, quinque, aut ſeptem. Atque hac ratione jam ex proprio ſuo fonte impoſſibilitas earum quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, deducta mihi videtur. Interim nolim hìc reticere, impoſſibilitatem iſtam in eo tantùm conſiſtere, quod quantitates illæ, nec poſſint

eſſe

eſſe poſitivæ, nec negativæ; ſed non hinc eas omnino fictitias dixerim. Nam aſſeverare non vereor, tertium quendam ſtatum fingi poſſe, qui ſit medius inter poſitivum, & negativum, & in quo quantitates illæ ſint reponendæ. Quin imò in Geometria ſpes pulcherrima me fovet, quod ſicuti quantitates poſitivæ, & negativæ explicantur per lineas, ad plagas oppoſitas tendentes; ſic & quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, explicari poſſint per lineas, quæ ad plagas intermedias tendant.

Cæterùm, quum quantitates negativæ ſint perinde reales, ac poſitivæ; illud exinde colligi poterit, quantitatem negativam — 4 eſſe minorem quantitate poſitiva 2 ratione ſtatus; ſed maiorem ratione quantitatis. Unde modò facilè intelligi poteſt, qua ratione dici poſſit 2 eſſe ad — 4, ut — 5 ad 10, & tamen vera eſſe Euclidea Propoſitio, quod ſi quatuor quantitates proportionales fuerint, ſecunda quartâ ſit major, minor, vel æqualis, perinde ac prima tertiâ eſt major, minor, vel æqualis. Conſideravit etenim Euclides in illa propoſitione exceſſum, defectum, vel æqualitatem, quæ oritur ex propria cujuſque termini quan-

quantitate: & profectò verum eſt dicere, quod ſicuti ratione quantitatis primus terminus 2 eſt minor tertio — 4, ita ſecundus — 5 minor ſit quarto 10.

III.

Calculus quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, exponitur.

ETſi quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, ſaltem in ſtatu poſitivo, & negativo, verè, ac realiter non exiſtant, ſed tantùm fingi poſſint, ac imaginari; quia tamen in reſolutione problematum ſæpe ſæpiùs nobis occurrunt, contingere quandoque poteſt, ut eæ etiam ad calculum poni debeant. Quocirca, ne aliquid prætermittamus, quod ad quantitatum calculum pertinere videatur, illud nunc oſtendemus, qua ratione quantitatum, quæ dicuntur imaginariæ, calculus perfici poſſit. Sed hac in re non multum morabimur. Nam, quum hujuſcemodi quantitates exprimantur ad inſtar radicalium, perficietur calculus ipſarum iiſdem fermè regulis, quibus radicalium quantitatum calculus perficitur.

Itaque primò quantitates imaginariæ re-

reducuntur ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, collocando extra ſignum id omne, quod in iis eſt ſimul rationale, ac poſitivum: qua ratione quantitas imaginaria $\sqrt{-12}$ reducetur ad $2\sqrt{-3}$; & quantitas imaginaria $\sqrt{-4}$, reducta ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, fiet $2\sqrt{-1}$. Sed viciſſim quantitates, extra ſignum exiſtentes, ſub ſigno collocabuntur, elevando illas ad poteſtatem à ſigno denominatam, eaſdemque multiplicando per quantitates, quæ ſub ſigno reperiuntur: Qua ratione $3\sqrt{-2}$ erit idem, ac $\sqrt{-18}$; & $2\sqrt{-5}$ idem erit, ac $\sqrt{-20}$.

Secundò, quantitates imaginariæ adduntur in unum, conjungendo ſimul coefficientes ipſarum, quotieſcumque reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, eandem habent ſub radicali ſigno quantitatem. Sic ſumma ex quantitatibus imaginariis $2\sqrt{-2}$, & $3\sqrt{-2}$ erit $5\sqrt{-2}$; & ſimiliter ſumma ex quantitatibus imaginariis $3\sqrt{-1}$, & $4\sqrt{-1}$, erit $7\sqrt{-1}$. Sed ſi ad ſimpliciores ſuos terminos reductæ, diverſas habeant ſub radicali ſigno quantitates; tunc fiet additio, conjungendo eas ſigno $+$. Qua ratione ſumma ex quantitatibus imaginariis $2\sqrt{-3}$, & $3\sqrt{-2}$, erit $2\sqrt{-3}+3\sqrt{-2}$.

Ter-

Tertiò, quantitates imaginariæ ſubtrahuntur à ſe mutuò, ſubducendo coefficientem unius à coefficiente alterius, quotieſcumque reductæ ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, eandem habent quantitatem ſub ſigno radicali. Sic reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $2\surd-2$ ex $5\surd-2$, erit $3\surd-2$; & ſimiliter reſiduum, quod naſcitur, ſubducendo $3\surd-1$ ex $7\surd-1$, erit $4\surd-1$. Sed ſi ad ſimpliciores ſuos terminos reductæ, habeant ſub radicali ſigno diverſas quantitates; tunc non aliter quantitatum ſubtractio fieri poterit, quàm conjungendo eas ſigno —. Qua ratione id, quod relinquitur, quum ſubtrahitur $2\surd-3$ ex $3\surd-2$, erit $3\surd-2-2\surd-3$.

Quartò, ſi additio, vel ſubtractio fieri debeat inter quantitatem unam realem, & quantitatem alteram imaginariam; tunc non alia ratione inſtituenda, quàm adhibito ſigno +, vel —. Sic ad addendum 3 cum $\surd-3$, ſcribendum eſt $3+\surd-3$; pariterque ad addendum $\surd6$ cum $\surd-3$, ſcribi debet $\surd6+\surd-3$. Atque ita quoq; ad ſubtrahendum $\surd-3$ ex 5, ſcribendum eſt $5-\surd-3$; & $\surd6-\surd-3$, ad ſubtrahendum $\surd-3$ ex

ex $\sqrt{6}$, Neque refert, quotieſcumque quantitas realis eſt radicalis, quod illa eandem habeat quantitatem ſub ſigno radicali, ac quantitas imaginaria. Nam adhuc ad addendum $\sqrt{-3}$ cum $\sqrt{3}$, ſcribendum eſt $\sqrt{3}+\sqrt{-3}$; & ad ſubtrahendum $\sqrt{-3}$ ex $\sqrt{3}$, ſcribi debet $\sqrt{3}-\sqrt{-3}$.

Quintò, quantitates imaginariæ multiplicari poſſunt per ſe mutuò abſque eo, quod ad ſimpliciores ſuos terminos revocentur; quum ſufficiat, ad invicem multiplicare quantitates ipſas, ſub ſignis exiſtentes, & producto idem radicale ſignum præfigere. Qua ratione productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-2}$ per $\sqrt{-3}$, erit $\sqrt{6}$; & ſimiliter id, quod gignitur, multiplicando $\sqrt{-5}$ per $\sqrt{-6}$, erit $\sqrt{30}$. Ex quo patet, productum ex duabus quibuſvis quantitatibus imaginariis eſſe quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Sed ſi multiplicari debeat $\sqrt{3}$ per $\sqrt{-6}$, productum erit $\sqrt{-18}$; & ſimiliter, quia 2 eſt idē, ac $\sqrt{4}$, multiplicando 2 per $\sqrt{-3}$, producetur $\sqrt{-12}$.

Sextò, quantitates imaginariæ dividi quoque poſſunt per ſe mutuò, abſque eo, quod ad ſimpliciores ſuas expreſſiones redu-

ducantur; quum ſimiliter ſatis ſit, ad invicem dividere quantitates ipſas, ſub ſignis exiſtentes, & quotienti idem radicale ſignum præfigere. Qua ratione quotiens, qui oritur, dividendo $\surd - 12$ per $\surd - 2$, erit $\surd 6$; pariterque id, quod producitur, dividendo $\surd - 18$ per $\surd - 6$, erit $\surd 3$. Ex quo patet, quotientem, qui oritur ex diviſione duarum quantitatum imaginariarum, eſſe quantitatem aliam realem, & non quidem imaginariam. Sed ſi dividere oporteat $\surd 12$ per $\surd - 6$, vel etiam $\surd - 12$ per $\surd 6$ quotiens erit $\surd - 2$; & ſimiliter quia 2 idem eſt, ac $\surd 4$, dividendo $\surd - 12$ per 2, quotiens fiet $\surd - 3$.

Septimò, ad elevandas quantitates imaginarias ad datam quamcumque poteſtatem neque etiam neceſſe eſt, ad ſimpliciores ſuos terminos eas revocare; quum ſufficiat, ad poteſtatem illam attollere quantitates ipſas, ſub ſigno exiſtentes, iiſque idem radicale ſignum præfigere. Qua ratione quadratum ex $\surd - 3$, erit $\surd 9$, hoc eſt 3, vel etiam $- 3$; & cubus ex $\surd - 3$ erit $\surd - 27$. Pariterque quadratum ex $\surd - 2$ erit $\surd 4$, hoc eſt 2, vel etiam $- 2$; & cubus ex $\surd - 2$ erit $\surd - 8$. Unde patet, quantitatum imagi-

ginariarum poteſtates quidem numeri paris eſſe quantitates veras, ac reales; poteſtates verò numeri imparis eſſe quantitates ſimiliter imaginarias.

Denique, ad extrahendas radices ex quantitatibus imaginariis, neque etiam ullâ opus eſt earum ad ſimpliciores ſuos terminos reductione; quum ſatis ſit, illas extrahere ex quantitatibus, ſub ſigno exiſtentibus, iiſque idem radicale ſignum præfigere; vel etiam, ſi quantitates, ſub ſigno exiſtentes, radices illas non admittant, multiplicare indicem ſigni radicalis per indicem quæſitæ radicis. Qua ratione radix cubica quantitatis imaginariæ $\sqrt{-8}$ erit $\sqrt{-2}$; ſed radix cubica quantitatis imaginariæ $\sqrt{-6}$ erit $\sqrt[6]{-6}$. Atque ita quoq; quadrata radix ex quantitate imaginaria $\sqrt{-9}$ erit $\sqrt[4]{-9}$; quum radix illa ex quantitate, ſub ſigno exiſtente, velut negativâ, extrahi non poſsit.

Sed qua ratione $\sqrt[4]{-9}$ poſsit eſſe quadrata radix quantitatis imaginariæ $\sqrt{-9}$, non ita facile intelliget, qui paulò ante didicerit, quantitatum imaginariarum poteſtates numeri paris eſſe quantitates veras, ac reales. Sic enim quadratum ex $\sqrt[4]{-9}$ erit ſimul realis, & ima-

Digitized by Google

& imaginaria; realis inquam, quia ex regula, ſuperiùs tradita, eſſe debet $\sqrt[4]{81}$; imaginaria verò, quia multiplicando $\sqrt[4]{-9}$, per ſe ipſam, neceſſe eſt, ut producatur $\sqrt{-9}$, cujus quadratam radicem quantitas illa repræſentat. Sed antinomiam iſtam nullo negotio componemus, ſi recordemur eorum, quæ ſuperiùs dicta ſunt: nimirum poteſtates poſitivas numeri paris duas radices habere, unam nempe poſitivam, & alteram negativam. Sic enim quadrata radix numeri 81 erit tam 9, quàm -9; atque adeo $\sqrt[4]{81}$, erit non modò $\sqrt{9}$, verùm etiam $\sqrt{-9}$.

Jam in harum quantitatum calculo expediendo illud requiritur, ut eæ ſint ejuſdem denominationis, ſive idem habeant ſignum radicale. Quocirca ſi quantitates offerantur denominationis diverſæ, neceſſe eſt priùs ad eandem denominationem illas reducere. Reducuntur autem quantitates imaginariæ ad eandem denominationem eodem planè artificio, quo fit hujuſmodi reductio in quantitatibus radicalibus, quæ ſunt veræ, ac reales. Qua ratione quantitates imaginariæ $\sqrt[4]{-2}$, & $\sqrt{-3}$, reductæ ad eandem denominationem erunt $\sqrt[4]{-2}$, & $\sqrt[4]{9}$;

pariterque ſi quantitas imaginaria $\sqrt{-3}$ reducenda ſit ad eandem denominationem cum quantitate reali $\sqrt[3]{7}$, erit una $\sqrt[6]{-27}$, altera $\sqrt[6]{49}$.

Quod ſi quantitates imaginariæ quantitatibus aliis adhæreant, ſive realibus, ſive etiam imaginariis; earum calculus fiet quoque eadem omnino ratione, ac calculus radicalium compoſitarum. Ita ſumma ex $5 + \sqrt{-18}$, & $3 - \sqrt{-50}$ erit $8 - \sqrt{-8}$; & reſiduum, quod oritur, ſubtrahendo $4 - \sqrt{-54}$ ex $10 + \sqrt{-24}$, erit $6 + \sqrt{-150}$. Pariterque id, quod producitur, multiplicando $2 + \sqrt{-2}$ per $2 - \sqrt{-3}$, erit $4 - 2\sqrt{-3} + 2\sqrt{-2} - \sqrt{6}$; & id, quod gignitur, dividendo $\sqrt{6} + \sqrt{-9} - \sqrt{-10} - \sqrt{-15}$ per $\sqrt{2} + \sqrt{-3}$, erit $\sqrt{3} - \sqrt{-5}$. Atque ita quoque quadratum ex $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$, erit $2 + \sqrt{-60}$; & quadrata radix binomii $1 + \sqrt{-24}$ erit $\sqrt{3} + \sqrt{-2}$.

Interim in calculo harum quantitatum illud ſedulò notandum exiſtimo, quod tametſi, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, producatur quantitas realis $\sqrt{9}$, quæ poteſt eſſe vel 3, vel etiam -3; hìc tamen quantitas illa ſumenda ſit ſemper negativa, & non poſitiva: adeo, ut produ-

ctum,

ctum ex $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$ debeat eſſe -3, & non quidem 3. Id autem ipſa quantitatum imaginariarum geneſis ſuadet. Nam hujuſmodi quantitates oriuntur, extrahendo radicem, exempli gratia, quadratam ex quantitatibus negativis. Quocirca neceſſe eſt, ut quadrata ipſarum quantitates producant negativas, & non poſitivas.

Hac igitur ratione quadratum ex $\sqrt{5} + \sqrt{-3}$ erit $2 + \sqrt{-60}$, & non $8 + \sqrt{-60}$, quia ſcilicet quadratum partis imaginariæ $\sqrt{-3}$ eſt quantitas negativa -3, & non jam quantitas poſitiva 3. Atque hoc non ſolùm locum habet, quum quantitates, quæ ad invicem multiplicantur, inter ſe ſunt æquales, hoc eſt, quum alicujus quantitatis imaginariæ quadratum quæritur; verùm etiam quum quantitates, ad multiplicandum propoſitæ, fuerint inæquales. Ita multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-12}$ producitur quantitas realis $\sqrt{36}$, quæ etſi poſſit eſſe tam 6, quàm -6, nihilominus, veluti orta ex duabus quantitatibus imaginariis, per ſe mutuò multiplicatis, negativa tantùm ſumi debet.

Atque hinc modò, ſi multiplicari debeat $\sqrt{-3}$ per $-\sqrt{-3}$, productum

erit quantitas poſitiva 3. Nam quantitates, ad multiplicandum propoſitæ, contrariis ſignis afficiuntur: proindeque productum, quod inde oritur, juxta regulas ſignorum, ſumi debet negativum, & non poſitivum. Itaque, quia id, quod producitur ex multiplicatione illarum quantitatum, eſt quantitas negativa — 3, & negativum negativi eſt poſitivum; erit productum propoſitæ multiplicationis quantitas poſitiva 3. Atque ita quoque erit 6 id, quod producitur, multiplicando, vel $\surd - 3$ per $- \surd - 12$, vel etiam $- \surd - 3$ per $\surd - 12$.

Et quoniam diviſio deſtruit id, quod componit multiplicatio, perſpicuum eſt quoque, quod ſicuti multiplicando $\surd - 3$ per $- \surd - 3$, producitur quantitas realis poſitiva 3; ita dividendo 3 per $\surd - 3$, produci debeat $- \surd - 3$. Atque ita quoque, quemadmodum productum, quod oritur, multiplicando $\surd - 12$ per $- \surd - 3$ eſt quantitas realis poſitiva 6; ita quotiens, qui gignitur, dividendo 6 per $\surd - 12$ debeat eſſe $- \surd - 3$.

Alio

IV.

Alia quædam de quantitatibus imaginariis afferuntur.

EX calculo mox tradito quantitatum imaginariarum, perſpicuum eſt, quantitates imaginarias non aliter quantitatibus realibus opponi, quàm negativæ poſitivis. Nam primò, quemadmodum multiplicando, aut dividendo quantitatem poſitivam per quantitatem negativam, producitur quantitas alia ſimiliter negativa; ita multiplicando, aut dividendo quantitatem realem per quantitatem imaginariam producitur quantitas alia ſimiliter imaginaria. Et ſecundò ſicuti productum, vel quotiens, qui oritur ex duabus quantitatibus negativis, per ſe mutuò multiplicatis, vel diviſis, eſt quantitas poſitiva; ita id, quod producitur ex multiplicatione, aut diviſione duarum quantitatum imaginariarum eſt quantitas, non quidem imaginaria, ſed realis.

Verum quidem eſt, id non adhuc vel ſaltem omnibus omnino Algebriſtis innotuiſſe, productum, vel quotientem ex

multiplicatione, vel diviſione duarum quantitatum imaginariarum eſſe quantitatem aliam veram, ac realem; quum non deſint, qui in ſuis Algebræ Elementis doceant, quantitates duas imaginarias, per ſe mutuò multiplicatas, vel diviſas, quantitatem aliam imaginariam producere. Sed eos in maximo errore verſari, oſtendi poteſt, tum quia ex ipſa geneſi quantitatum imaginariarum notum eſt, productum, quod oritur, multiplicando $\sqrt{-3}$ per $\sqrt{-3}$, eſſe quantitatem realem -3; tum etiam, quia in confeſſo eſt apud omnes, idem eſſe, ex producto, vel quotiente duorum quadratorum quadratam radicem elicere, quam ipſas eorum quadratorum radices per ſe mutuò multiplicare, vel dividere.

Jam, quum quantitates imaginariæ perinde realibus opponantur, ac quantitates negativæ poſitivis; eò magis ad credendum adducor, quantitates, quæ dicuntur imaginariæ, non eſſe abſolutè impoſſibiles, ſed tantùm, quia in ſtatu negativarum, vel poſitivarum concipi non poſſunt. Oppoſitio namque, quæ eſt inter quantitates poſitivas, & negativas, nihil obſtat, quominùs negativæ ſint perinde reales, ac poſitivæ. Itaque eadem

ra-

ratione, tametſi quantitates, quæ vocantur imaginariæ, opponantur iis, quæ vulgò dicuntur reales; non hinc tamen colligi poteſt, quantitates, imaginarias dictas, abſolutè impoſſibiles eſſe; ſed tantùm inferre licet, quod ſicuti quantitates negativæ ſunt impoſſibiles in ſtatu poſitivarum, ita quantitates imaginariæ impoſſibilitatem involvant in utroque eorum ſtatuum, in quibus reales quantitates conſiderantur.

Atque hinc eò magis etiam in mea illa opinione me confirmo, quod in Geometria ſicuti quantitates poſitivæ deſignantur per lineas, tendentes ad plagam unam, & negativæ per lineas, tendentes ad plagam oppoſitam; ita quantitates imaginariæ deſignari debeant per lineas, quæ ad plagas intermedias diriguntur. Nam linea, quæ plagas iſtas oſtendit, ſecat ad rectos angulos lineam, priores duas plagas oſtendentem: ex quo fit, ut unæ aliis oppponantur ex diametro. Quocirca lineæ, tẽdentes ad plagas illas intermedias, deſignare debent quantitates contrarias iis, quas deſignant lineæ, tendentes ad plagas alias: proindeque, quia iſtæ lineæ deſignant quantitates, quæ vulgò dicuntur reales, eæ non alias poterunt deſigna-

Digitized by Google

re, quàm ipſas illas, quæ vulgò vocantur imaginariæ.

Huc accedit & altera ratio, quæ forſan demonſtrationis vices geret apud eos, qui probè norint, quàm benè Algebra cũ Geometria conſentiat: nimirum, quod ſicuti quantitatum, quæ dicuntur vulgò reales, aliæ ſunt poſitivæ, aliæ negativæ; ita quantitates, quæ vocantur imaginariæ, non modò eſſe poſſint poſitivæ, verùm etiam negativæ. Sic radix quadrata quantitatis negativæ $-a$ deſignari poteſt tam per $\sqrt{-a}$, quàm per $-\sqrt{-a}$, quia ſcilicet, juxta regulas ſignorum, utriuſque quadratum eſt $-a$. Itaque, quia plagæ illæ intermediæ opponuntur etiam inter ſe: profectò per lineas, tendentes ad unam illarum, deſignari poterunt quantitates imaginariæ poſitivæ; per eas verò, quæ tendunt ad plagam alteram, quantitates imaginariæ negativæ poterunt denotari.

Quæ quidem ſi ita vera ſint, quemadmodum maximam veriſimilitudinis ſpeciei præſeferre videntur, illud ex iis mihi videtur colligi poſſe, inter quantitates, qua quantitates, nullam contrarietatem reperiri; quum omnes ſint nihilo majores, omnes æquè reales, ac veræ; ſed

Digitized by Google

ſed omnem oppoſitionem oriri ex eo, quod unæ concipi debeant in ſtatu uno, & aliæ in ſtatu contrario: indeque ortas eas quantitatum diſtinctiones, quod aliæ ſint poſitivæ, ſive nihilo majores, aliæ negativæ, ſive nihilo minores; quodque etiam quædam ſint reales, ſivæ verè, ac realiter exiſtentes, quædam imaginariæ, hoc eſt, quæ tantùm fingi poſſunt, ac imaginari.

Hunc autem diverſum ſtatum nihil obſtare, quominùs poſitivæ cum negativis, reales cum imaginariis comparentur, non eſt, quod in dubium poſſit revocari. Nam etſi quantitates, quæ comparantur inter ſe, Euclide ipſo docente, debeant eſſe unius, ejuſdemque generis; attamen tales ſunt cenſendæ non quidem ratione ſtatus, in quo conſiderantur, ſed ratione ejus, per quod quantitatis nomen merentur: adeò, ut, nec linea cum ſuperficie, nec ſuperficies cum corpore poſſit comparari, quia ſcilicet diverſa ratione quantitates appellantur. Unde quum quantitates negativæ non ſint diverſi generis à poſitivis propter ſolam negationem, falluntur ii, qui falli eos arbitrantur, quod dicant 1 eſſe ad — 1, ut — 1 ad 1.

Interim etſi ſolus ſtatus diverſus non eſſi-

efficiat, ut quantitates dici debeant diverſi generis; non hinc tamen negamus, diverſum illum ſtatum etiam attendendum eſſe, quò quatuor quantitates dici debeant proportionales. Vera etenim proportionis idea, ut ſuperiùs vidimus, hæc eſt, ut tunc quidem dicendæ ſint proportionales quatuor quantitates, quotieſcumque quicquid efficitur à prima, ut ſecundam adæquæt, illud idem fieri debet à tertia, ut poſſit quartam adæquare. Unde quatuor quãtitates non ſolùm tales eſſe debent, ut prima perinde contineat ſecundam, ac tertia continet quartam; verùm etiam, ut ſtatus primæ ad ſtatum ſecundæ perinde ſe habeat, ac ſtatus tertiæ ad ſtatum quartæ.

Sed jam me tædet, de hac re multa ſcripſiſſe. Itaque, ut huic capiti finem imponam, illud ſupereſt oſtendendum, quod in extractione radicis quadratæ ex binomiis ſuperiùs dictum fuit: nimirum quod etſi perinde ſit, ſive ſcribatur $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, ſive $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ pro radice quadrata binomii $8 - \sqrt{60}$; attamen non perinde ſit, ſive binomium propoſitum ſit $8 - \sqrt{60}$, ſive $\sqrt{60} - 8$; quum in primo caſu radix ſit realis, in ſecundo autem imaginaria: quod equidem non me-

meliùs arbitror oſtendi poſſe, quàm ſi eâdem illâ regulâ, ſúperiùs traditâ, ex binomio $\sqrt{60} - 8$ quadratam radicem extrahamus.

Nimirum, quia quadratum termini radicalis eſt 60, quadratū verò termini rationalis eſt 64; erit 4 eorum quadratorū differentia, & 2 illius differentiæ quadrata radix. Quocirca, ſi radix iſta 2 primò quidem addatur termino rationali $- 8$, deinde verò ex eodē ſubducatur, erit $- 3$ ſemiſſis ſummæ, & $- 5$ ſemiſſis differentiæ: proindeque quadrata radix propoſiti binomii erit $\sqrt{-5} - \sqrt{-3}$, quam liquet imaginariam eſſe, quum ejus uterque terminus ſit quantitas imaginaria, hoc eſt radix quantitatis negativæ.

Nec ulli dubium eſſe poteſt, quin quantitas iſta $\sqrt{-5} - \sqrt{3}$ ſit quadrata radix binomii $\sqrt{60} - 8$. Nam etſi multiplicatatâ eâ per ſe ipſam, juxta regulas ſignorum, producatur quantitas $- \sqrt{60} - 8$; attamen, quia quantitas realis $\sqrt{60}$, veluti orta ex duabus quantitatibus imaginariis, per ſe mutuò mutiplicatis, interpretanda eſt tamquam negativa; erit viciſſim poſitiva ipſa quantitas $- \sqrt{60}$; nec proinde differet à $\sqrt{60}$, conſideratâ

tam-

tamquam poſitivâ : proindeque quadratum ex $\sqrt{-5} - \sqrt{-3}$ erit $\sqrt{60} - 8$, nimirum ipſum binomium propoſitum.

CAP. XI.

De quantitatibus indefinitè magnis, & parvis; ubi etiam de ſeriebus infinitis.

Quantitatis nomine id omne venit, quod plus, & minus ſuſcipiens augeri, ac minui poteſt. Unde ſicuti, quod minui amplius nequit, illud non quantum, ſed nihil dici debet; ita viciſſim quod nequit amplius augeri, neque etiam quantum, ſed infinitum dici meretur.

Interim nihil obſtat, quominùs quantitates ipſas inter ſe mutuò collatas diſtinguamus in indefinitè magnas, & indefinitè parvas. Si enim quantitas aliqua ſubinde augeri, aut minui intelligatur, ut ex illo incremento, aut decremento nullam patiatur ſenſibilem mutationem, ſed adhuc velut in eodem ſtatu manens rigore tantùm non geometrico poſſit conſiderari; tum hujuſmodi incrementum, aut decrementum reſpectu illius quanti-ta-

tatis dici poterit quantitas indefinitè parva; & viciſſim quantitas illa reſpectu ejus incrementi, vel decrementi quantitas indefinitè magna poterit appellari.

Atque hac ratione non modò quantitates in indefinitè magnas, & indefinitè parvas poterunt diſtingui; ſed & ipſæ illæ quantitates, quæ in ordine ad quaſdam dicuntur indefinitè parvæ, reſpectu aliarum, tamquam indefinitè magnæ, poterunt conſiderari. Nam ſi rurſus quantitas aliqua, quæ in ordine alterius dicitur indefinitè parva, ita augeri, aut minui concipiatur, ut per illud incrementum, aut decrementum à ſtatu ſuo ſenſibiliter non mutetur; jam quantitas illa reſpectu alterius hujus incrementi, aut decrementi, velut indefinitè magna, poterit haberi. Quumque eadem ſit ratio, non ſolùm de novo iſto incremento, vel decremento, ſed de omnibus aliis, quæ ratione non diſſimili conſiderantur; liquet contemplationem iſtam quantitatum indefinitè parvarum in infinitum poſſe promoveri.

Hinc non abs re erit, eas velut in certa genera diſtinctas conſiderare. Itaque ſi ſumamus quantitatem aliquam finitam, ex cujus continuo incremento, vel decre-

men-

mento oriantur quantitates indefinitæ parvæ; dicemus reſpectu ejus infiniteſimam primi generis, minimum illud incrementum, vel decrementum, quo intelligitur ipſa augeri vel minui; dicemus infiniteſimam generis ſecundi, incrementum, vel decrementum illud minimum, quo intelligitur augeri, vel minui infiniteſima generis primi; atque ita deinceps: proindeque eadem illa infiniteſima, quæ reſpectu quantitatis finitæ eſt generis tertii, ſi conſideretur in ordine ad infiniteſimam primi generis, fiet generis ſecundi.

Jam ex tradita iſta quantitatum infiniteſimarum idea illud primò colligi poteſt, quod ſicuti quantitates finitæ per aliarum quantitatum finitarum additionem, vel ſubtractionem augentur quidem, vel minuuntur, ſed non item per additionem, vel ſubtractionem infiniteſimarum; ſic & ipſæ quantitates infiniteſimæ tunc quidem additione, vel ſubtractione aliarum infiniteſimarum augeantur, vel minuantur, quotieſcumque ſunt ejuſdem generis, ſed non item quum infiniteſimæ, quæ iis adduntur, vel ſubtrahuntur, fuerint generis inferioris. Qua ratione duplum, aut triplum alicujus

Digitized by Google

cujus infiniteſimæ non eſt ferè idem cum ipſa infiniteſima; ſed infiniteſima alicujus generis, aucta, vel diminuta infiniteſima generis inferioris, nihil obſtat, quominùs pro ipſa infiniteſima capiatur.

Colligi poteſt ſecundò infiniteſimam alicujus generis, ſi aliquoties ſumatur, adhuc in eodem genere manere, quod ſi verò ſumatur infinities, in genus proximè ſuperiùs abire: atque ita quoque, quamcumque alicujus infiniteſimæ partem eſſe infiniteſimam ejuſdem generis, ſed infiniteſimam alicujus infiniteſimæ eſſe infiniteſimam generis proximè inferioris. Qua ratione multiplicando, vel dividendo infiniteſimam aliquam per quamlibet quantitatem finitam, producetur infiniteſima ejuſdem generis; quia omnis quantitas finita nonniſi aliquoties continet unitatem. Sed ſi quælibet infiniteſima multiplicetur, vel dividatur per infiniteſimam generis primi, orietur infiniteſima generis, vel proximè minoris, vel proximè majoris; quia infiniteſima generis primi infinities continetur in unitate.

Et denique colligi poteſt, infiniteſimam cujuſcumque generis, ſumptam infini-

finities tantum in genus proximè ſuperius verti, ſed ſumptam infinities infinities, in genus duplici gradu ſuperius abire; atque ita continuò: & eadem ratione infiniteſimam tantùm alicujus infiniteſimæ eſſe infiniteſimam generis proximè inferioris; ſed infiniteſimam infiniteſimæ eſſe infiniteſimam generis duplici gradu inferioris; atque ita deinceps. Qua ratione ſi data quævis infiniteſima multiplicetur, vel dividatur per aliã quãvis infiniteſimã, producetur infiniteſima generis ab illa inferioris, vel ſuperioris tot gradibus, quot iſta diſtat à quantitate finita. Ut ſi, exempli gratia, infiniteſima generis tertii multiplicetur per infiniteſimam generis ſecundi, producetur infiniteſima generis quinti; & ſi infiniteſima generis ſexti dividatur per infiniteſimam generis quarti, quotiens orietur, infiniteſima generis ſecundi.

Atque hinc liquet ulteriùs, infiniteſimæ, quæ oriuntur ex multiplicatione, vel diviſione aliarum infiniteſimarum, non meliùs cognoſci poſſe, ad quod genus ſint revocandæ, quam adhibitis ipſis infiniteſimarũ exponentibus; quandoquidem ſumma exponentium multiplicandi, & multiplicatoris dabit exponentem

tem producti; & exponens diviſoris, ſubtractus ab exponente dividendi, relinquet exponentem quotientis. Ita infiniteſima primi generis, multiplicata per infiniteſimam ſecundi generis, producet infiniteſimam generis tertii, quia 1 + 2 eſt 3; & infiniteſima ſecundi generis multiplicata per infiniteſimam generis tertii, dabit infiniteſimam generis quinti, quia 2 + 3 eſt 5. Atque ita quoque id, quod producitur, dividendo infiniteſimam generis quarti per infiniteſimam generis tertii, erit infiniteſima primi generis, quia 4 — 3 eſt 1; & id, quod gignitur, dividendo infiniteſimam noni generis per infiniteſimam generis quarti, erit infiniteſima quinti generis, quia 9 — 4 eſt 5.

Et quoniam exponens quantitatis finitæ in ordine ad exponentes infiniteſimarum eſt zero, ſive nihil; perſpicuum eſt, quod ſi infiniteſima alicujus generis dividatur per infiniteſimam generis ejuſdem, quotiens debeat eſſe quantitas finita; quia facta exponentium ſubductione, nihil remanet. Sed ſi porrò dividatur infiniteſima generis ſecundi per infiniteſimam generis tertii, tunc orietur in quotiente infiniteſima, cujus exponens erit — 1; quia ſci-

Digitized by Google

licet 2 — 3 eſt idem, ac — 1. Et ſimiliter ſi infiniteſima generis tertii dividatur per infiniteſimam generis quinti, quotiens prodibit infiniteſima, cujus exponens erit — 2; quia 3 — 5 eſt idem, ac — 2. Unde diſcimus, præter infiniteſimas, quarum exponentes ſunt poſitivi, dari infiniteſimas alias, quarum exponentes ſunt negativi.

Sed quæ ſit natura illarum infiniteſimarum, quarum exponentes ſunt negativi, non ita difficile erit inquirere: nimirum, quum negativum opponatur ſemper poſitivo, profectò ſicuti infiniteſimæ, exponentes poſitivos habentes, deſignant quantitates indefinitè parvas; ita infiniteſimæ, quæ habent exponentes negativos, deſignare debent quantitates indefinitè magnas. Nec mirum. Nam ſicuti, deſcendendo à quantitate finita, varia infiniteſimarum genera diſtingui poſſunt; ita viciſſim aſcendendo, varia genera infinitorum poterunt conſiderari. Qua ratione quantitas, quæ ſit ad quantitatem finitam, ut eſt quantitas finita ad infiniteſimam primi generis, dicenda eſt quantitas infinita generis primi. Et ſimiliter quantitas, quæ ita ſe habeat ad quantitatem finitam, ut eſt quantitas finita

nita ad infiniteſimam ſecundi generis, quantitas infinita generis ſecundi poterit appellari.

Itaque dividendo infiniteſimam generis ſecundi per infiniteſimam generis tertii, producetur quantitas infinita generis primi; & dividendo infiniteſimam tertii generis per infiniteſimam generis quinti, quotiens erit quantitas infinita generis ſecundi. Sed & ipſæ quantitates infinitæ poterũt eadem ratione, tam inter ſe, quàm cum ipſis infiniteſimis multiplicari, ac dividi: ſi ſcilicet recordemur, exponentes ipſarum eſſe negativos, ad differentiam infiniteſimarum, quarum exponentes ſunt poſitivi. Sic quantitas infinita generis primi, multiplicata per infiniteſimam generis ſecundi, dabit infiniteſimam generis primi; diviſa verò per eandem infiniteſimam, producet quantitetem infinitam generis tertii. Pariterque infiniteſima primi generis, multiplicata per quantitatem infinitam generis tertii, producet quantitatem infinitam generis ſecundi; diviſa verò per eandem quantitatem infinitam, dabit infiniteſimam generis quarti.

Atque hinc ſequens theorema ſua ſponte profluit, quod ſi quantitas infinita

cujuſcumque generis multiplicetur per infiniteſimam generis non diſſimilis, ipſumque adeo abſolutum infinitum per nihil abſolutum, productum ſit ſemper quantitas finita. Id autem mirum videri non debet; nam eadem quantitas finita deſignari poteſt per ſeriem infinitam, hoc eſt per infinitos numero terminos, nec ideo in infinitum abire. Quod profectò ut liquidò conſtet, non gravabimur de ſeriebus infinitis nonnulla hic breviter differere: eoque magis, quod hujuſmodi ſeries ſint, quaſi ſacra anchora, ad quam in maximè arduis, & deſperatæ ſolutionis problematibus, ubi omnes aliæ humani ingenii vires naufragium paſſæ ſunt, velut ultimi remedii loco, ſaniores Mathematici confugiunt.

I.

Geneſis ſerierum infinitarum oſtenditur.

SEries infinitæ originem habent, vel à diviſione, vel à radicum extractione. Nam primo quemadmodum in diviſione numerorum, quotieſcumque diviſor non eſt pars aliquota dividendi, procedi poteſt per fractiones decimales in infinitum; ita quoque quotieſcumque in divi-

diviſione quantitatum, quæ alphabeticis litteris ſunt deſignatæ, diviſor, qui pluribus partibus conſtet, non eſt inſtar partis aliquotæ in dividendo, diviſio in infinitum per fractiones ſimplices poterit continuari.

Ita ſi dividere oporteat, quantitatem ſimplicem m per quantitatem compoſitam $a-b$, diviſio fieri nequit, quia ſcilicet diviſor $a-b$ non eſt inſtar partis aliquotæ in quantitate dividenda: proindeque deſignandus eſt quotiens, quemadmodum ſuo loco docuimus, per fractionem compoſitam $\frac{m}{a-b}$. Sed adhibitis fractionibus ſimplicibus, inſtitui poterit diviſio in hunc modum.

Dividatur primò quantitas m per primam partem diviſoris a: & quoniam multiplicato quotiente $\frac{m}{a}$ per diviſorem ipſū $a-b$, producitur quantitas $\frac{am-bm}{a}$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda m, relinquit $\frac{bm}{a}$; dividatur ſecundò reſiduum

iſtud per a: & quia multiplicato quotiẽte $\frac{bm}{a^2}$ per diviſorem $a - b$, producitur quantitas $\frac{abm - b^2m}{a^2}$, quæ ſubducta ex reſiduo illo, relinquit $\frac{b^2m}{a^2}$; dividatur tertiò novum iſtud reſiduum per a: quumque ex hac diviſione novum oriatur reſiduum, nec unquam diviſio fieri poſſit exactè; operatio coutinuabitur in infinitum: qua ratione pro quotiente propoſitæ diviſionis invenietur ſeries infinita

$$\frac{m}{a} + \frac{bm}{a^2} + \frac{b^2m}{a^3} + \frac{b^3m}{a^4} \text{ \&c.}$$

Atque hoc artificio non modò liquet, quantitatem finitam per infinitos numero terminos poſſe deſignari; verùm etiam oſtendi poteſt admirandum illud theorema, quod infinitum abſolutum, multiplicatum per zero, ſive nihilum, producat quantitatem finitam; vel, quod eodem recidit, quod quotiens, qui oritur, dividendo quantitatem finitam per zero, ſive nihilum, ſit quantitas infinita. Si enim ſupponamus, quod b ſit

æqua-

æqualis a, jam in exemplo adducto diviſor $a - b$ fiet zero, ſive nihil: quumque in hoc caſu ſeries infinita, quæ quotientem exhibet diviſionis, mutetur in hanc aliam $\frac{m}{a} + \frac{m}{a} + \frac{m}{a} + \frac{m}{a} + \frac{m}{a}$ &c. ; erit idem ille quotiens fractio iſta $\frac{m}{a}$ infinities ſumpta: proindeque quia hujuſmodi fractio eſt quantitas finita, & finitum ſumptum infinities producit infinitum; erit idem ille quotiens quantitas infinita.

Neque verò eadem ratio viget, quum b eſt minor, quàm a; adeoque $a - b$ major, quàm nihil. Nam etſi quotiens, qui oritur, dividendo m per $a - b$, exprimatur per ſeriem infinitorum numero terminorum; attamen omnes illi termini ſimul collecti componunt quantitatem finitam, & non infinitam. Conſtituunt namque termini illi progreſſionem geometricam, cujus exponens eſt $\frac{b}{a}$: unde quum b ſit minor, quàm a, erit exponens ille unitate minor: proindeque termini progreſſionis continuò deſcreſcent;

atque ita, veluti decreſcentes, ſi ſimul colligantur, non infinitam, ſed finitam quantitatem conſtituent. Atque hinc factum, ut eædem illæ ſeries infinitæ dicerentur etiam à nonnullis ſeries convergentes, quia tametſi ex infinitis numero terminis conſtent; attamen termini illi citò convergunt, & minores ſemper, ac minores evadunt.

Similiter ſi dividenda ſit quantitas ſimplex m per quantitatem compoſitam $a + b$, quotiens in terminis finitis erit $\frac{m}{a+b}$. Sed adhibitis fractionibus ſimplicibus, diviſio procedit in infinitum, & hoc caſu pro quotiente propoſitæ diviſionis invenietur hujuſmodi ſeries infinita $\frac{m}{a} - \frac{bm}{a^2} + \frac{b^2m}{a^3} - \frac{b^3m}{a^4}$ &c. Unde paradoxum fluit nõ inelegans: nimirũ, quod ſeries iſta infinita $\frac{m}{a} - \frac{m}{a} + \frac{m}{a} - \frac{m}{a}$ &c., cujus termini contrarietate ſignorum ſeſe mutuò deſtruere videntur, adæquet quantitatem finitam $\frac{m}{2a}$. Nam ſi ſup-

ſupponamus, quod b ſit æqualis a; fiet in exemplo adducto diviſor $2a$, & ſeries infinita, quæ quotientem exhibet diviſionis, iſto caſu mutabitur in hanc aliam $\frac{m}{a} - \frac{m}{a} + \frac{m}{a} - \frac{m}{a}$ &c. Nec effugitur paradoxum, dicendo, quod ultimus terminus ſeriei, exhauſta infinitate, afficiatur ſigno $+$; nam hac ratione ſeries ipſa æqualis erit $\frac{m}{a}$, & non $\frac{m}{2a}$.

Jam hujus paradoxi non meliùs ratio intelligi poteſt, quàm ſi dividamus quantitatem m per aliam $2a$, ſive $a + a$. Itaque quia diviſa quantitate m per a, multiplicatoque quotiente $\frac{m}{a}$ per diviſorem $a + a$, producitur quantitas $m + m$, quæ ſubtracta ex quantitate dividenda, relinquit $-m$; divido ſecundò $-m$ per a: quumque rurſus multiplicato quotiente $-\frac{m}{a}$ per diviſorem $a + a$, quantitas oriatur $-m - m$, quæ ſubducta ex illo reſiduo relinquit m; perſpicuum eſt per con-

continuam diviſionem reſiduum non minui, ſed perpetuò adæquare ipſam quantitatem dividendam m : ex quo fit, ut exhauſta infinitate ultimus ſeriei terminus non modò concipiendus ſit affectus ſigno $+$, verùm etiam eſſe debeat $\frac{m}{2a}$; quia ſcilicet id, quod ultimò relinquitur dividendum per $a + a$, ſive $2a$ eſt ipſa quantitas m.

Liquet igitur, qua ratione oriantur ſeries infinitæ ex diviſione quantitatum. Sed non diſſimiliter ſuam geneſim habent ex radicum extractione. Nam ſicuti quum radix extrahi debet ex numero aliquo, qui non ſit poteſtas perfecta ejus ordinis, de quo agitur, procedi poteſt per fractiones decimales in infinitum, ſicque radix exhiberi, quæ proprius ſemper, ac proprius in infinitum ad veram impoſſibilem accedat; ita quoque quotieſcumque ex quantitate aliqua compoſita litterali quæſita radix extrahi nequit, adhibitis fractionibus ſimplicibus exprimi illa poterit per ſeriem infinitorum numero terminorum rationalium, quibus ita continuò ad quæſitam radicem accederetur, ut error tandem data

qua-

quavis quantitate minor foret, totaque ſeries exactum quæſitæ radicis valorem exhiberet.

Hujus rei duplex ſpecimen exhibebimus, unum in extractione radicis quadratæ, alterum in extractione radicis cubicæ. Proponatur itaque primò extrahenda quadrata radix ex $a^2 + b^2$. Hæc per methodum ſuperiùs traditam nequit haberi. Nam quadratum quantitatis, duabus ex partibus conſtantis, componitur ex quadratis partium, duploque ejus, quod oritur ex mutua earum partium multiplicatione: & quamquam in quantitate propoſita adſint quadrata partium a, & b; deficit tamem duplum ejus, quod ex multiplicatione mutua earundem partum producitur. Quocirca radix illa, velut incommenſurabilis, & irrationalis, in terminis finitis tantùm exprimi poteſt, adhibito ſigno radicali, in hunc modum $\sqrt{a^2 + b^2}$. Sed nihilominns eandem illam radicem exprimere licet per ſeriem, quæ ex infinitis numero terminis rationalibus conſtet, ſi ſcilicet operatio, per quam quadrata radix extrahitur, in infinitum continuetur.

Itaque, quia totum artificium in extra-

tractione radicis quadratæ, in eo conſiſtit ut per duplum radicis acquiſitæ dividatur ſemper proximus terminus quantitatis propoſitæ, à qua ſubducatur tam id, quod oritur, multiplicando duplum illud per inventum quotientem, quàm quadratum ipſius quotientis; extraho primùm radicem quadratam ex priori termino a^2: & quoniam diviſo termino altero b^2 per duplum iſtius radicis $2a$, quotiens oritur $\frac{b^2}{2a}$, qui ductus in $2a$ producit b^2, multiplicatus verò in ſe ipſum producit $\frac{b^4}{4a^2}$, ſubtraho utrumque iſtorum productorum ex altero illo termino b^2, & remanebit $-\frac{b^4}{4a^2}$. Quumque radix hactenus acquiſita ſit $a+\frac{b^2}{2a}$, divido reſiduum illud per duplum iſtius radicis, vel ſaltem per duplum partis prioris a, ut tertia pars oriatur $-\frac{b^4}{8a^3}$, & ſiquidem paratis iiſdem productis, fiat eo-

run-

rundem ſubtractio, habebitur pro reſiduo $\frac{b^6}{8a^4} - \frac{b^8}{64a^6}$. Unde ſimiliter ſi reſidui hujus dividatur prior terminus $\frac{b^6}{8a^4}$ per duplum radicis hactenus acquiſitæ $a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3}$, vel quod eodem recidit per priorem partem a duplicatam, eademque producta ſubducantur, habebitur in radice pars quarta $\frac{b^6}{16a^5}$, & relinquetur $- \frac{5b^8}{64a^6} + \frac{b^{10}}{84a^8} - \frac{b^{12}}{256a^{10}}$. Atque ita procedendo in infinitum, invenietur pro quadrata radice quantitatis propoſitæ $a^2 + b^2$ ſeries infinita

$$a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7} \text{ \&c.}$$

quæ quidem mutabitur in hanc aliam

$$a + \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a + \frac{1}{16}a - \frac{5}{128}a \text{ \&c.},$$

ſi b ipſi a ponatur æqualis.

Simi-

Similiter ſi extrahenda proponatur radix quadrata ex quantitate $a^2 - b^2$, hæc per regulam, ſuperiùs traditam, neque etiam poterit haberi: tum quia deficit id, quod bis oritur ex mutua multiplicatione partium a, & b; tum etiam quia non ambo quadrata partium ſigno $+$ afficiuntur. Sed adhibita vulgari radicem quadratam extrahendi ratione, nec non operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda ſeries infinita

$$a - \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} - \frac{b^6}{16a^5} - \frac{5b^8}{128a^7}$$

&c., quæ vertetur in hanc aliam

$$a - \frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a - \frac{1}{16}a - \frac{5}{128}a \text{ \&c.},$$

ſi ponatur b equalis a. Unde quia poſita æqualitate inter a, & b, quantitas $a^2 - b^2$ fit zero æqualis, atque adeo ejus quadrata radix evaneſcit; diſcimus hinc omnes illos terminos, qui in poſtrema ſerie primum excipiunt, ſimul collectos, ipſum primum terminum adæquare: ut ſcilicet hac ratione ſeries ipſa, mutua eorum terminorum deſtructione, poſſit in nihilum abire.

Sed earundem ſerierum uſum oſtenda-

Digitized by Google

damus modò in cubicæ radicis extractione. Hunc in finem proponatur extrahenda radix cubica ex quantitate $a^3 + b^3$: Planè hujuſmodi radix, methodo ſuperiùs expoſita, nequit haberi, quum in quãtitate propoſita adſint quidem cubi partiũ a, & b; ſed deficiat tam triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum primæ per ſecundam, quàm triplum ejus, quod gignitur, multiplicando quadratum ſecundæ per primam. Quocirca quæſita radix non alia ratione in terminis finitis exprimi poterit, quàm præfigendo quantitati propoſitæ ſignum radicale in hunc modum $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$. Sed nihilominùs eodem illo artificio, quo radices cubicæ extrahuntur, poterit quæſita radix per ſeriem infinitorum numero terminorum rationalium exhiberi.

Nimirum, quia totum artificium in extractione radicis cubicæ, in eo conſiſtit, ut per triplum quadrati radicis acquiſitæ dividatur proximus terminus quantitatis propoſitæ, à qua ſubducatur primò triplum ejus, quod oritur, multiplicando quadratum dictæ radicis per inventum quotientem; deinde triplum illius, quod producitur, multiplicando radicem ipſam per quadratum quotientis; ac denique cu-

cubus, qui fit ex ipſo quotiente: extraho primùm radicem cubicam ex priori termino a^3; & quoniam diviſo termino altero b^3 per $3a^2$, hoc eſt, per triplum quadrati inventæ radicis, producitur quotiens $\frac{b^3}{3a^2}$; ſubtraho ex altero illo termino non modò triplum producti, quod oritur, multiplicando quadratum acquiſitæ radicis a^2 per inventum quotientem; verùm etiam triplum producti, quod gignitur, multiplicando ipſam illam radicem per quadratum inventi quotientis, quemadmodum & cubum, qui fit ex ipſo quotiente: qua facta ſubductione, remanebit $-\frac{b^6}{3a^3} - \frac{b^9}{27a^6}$.

Hinc quum radix acquiſita ſit $a + \frac{b^3}{3a^2}$, divido ſecundò primum terminum illius reſidui per primum terminum quadrati radicis acquiſitæ triplicati, hoc eſt $-\frac{b^6}{3a^3}$ per $3a^2$, ut in radice tertia pars oriatur $-\frac{b^6}{9a^5}$; & paratis iiſdem productis, eorun-

Digitized by Google

eundemque facta ſubtractione, remanebit $\frac{5b^9}{27a^6} - \frac{b^{15}}{81a^{12}} - \frac{b^{18}}{729a^{15}}$. Unde ſimiliter, ſi reſidui hujus primus terminus dividatur per primum terminum quadrati radicis acquiſitæ triplicati, & facta eorundem productorum ſubtractione, procedatur eadem methodo in infinitum; invenietur pro radice cubica quantitatis propoſitæ $a^3 + b^3$ ſeries infinita $a + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8}$ &c., quæ quidem mutabitur in hanc aliam ſeriem $a + \frac{1}{3}a - \frac{1}{9}a + \frac{5}{81}a$ &c., ſi b ipſi a ponatur æqualis.

Eadem ratione ſi extrahenda proponatur radix cubica ex quantitate $a^3 - b^3$, ea per regulam ſuperiùs traditam neque etiam poterit inveniri; quum in illa non adſint partes omnes, ex quibus componitur cubus alicujus binomiæ radicis. Nihilominus adhibita vulgari radicem cubicam extrahendi ratione, nec non operatione in infinitum continuata, invenietur pro radice extrahenda ſeries infi-

nita $a - \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} - \frac{5b^9}{81a^8}$ &c., quæ quidem vertetur in hanc aliam $a - \frac{1}{3}a - \frac{1}{9}a - \frac{5}{81}a$ &c., ſi ponatur b æqualis a. Unde quia poſita æqualitate inter a, & b, quantitas $a^3 - b^3$ ſit æqualis zero, ſive nihilo, atque adeo ejus radix cubica evaneſcit; diſcimus hinc, omnes illos terminos, qui in poſtrema ſerie primum excipiunt, ſimul collectos, ipſum priorem terminum adæquare; ut ſcilicet hac ratione ſeries ipſa, mutua eorum terminorum deſtructione, poſſit in nihilum abire.

II.

De ſeriebus infinitis, quarum termini conſtituunt progreſſionem geometricam.

Quantitatem finitam in ſeriem infinitorum numero terminorum convertere, problema eſt, quod nullam difficultatem involvit. Ut enim vidimus, ortum habent ſeries infinitæ, vel à diviſione quantitatum, vel à radicum ex-

Digitized by Google

extractione. Unde quia quælibet quantitas conſiderari poteſt, non modò tamquam quotiens ortus ex imperfecta diviſione duarum aliarum, verùm etiam tamquam radix alterius quantitatis, quæ non ſit poteſtas perfecta ordinis aſſumpti; perſpicuum eſt, quamcumque quantitatem finitam poſſe utraque ratione per ſeriem infinitorum numero terminornm deſignari.

Jam converſum hujus problematis, nimirum ſeriei infinitorum numero terminorum ſummam finitam invenire, non modò paulò difficiliùs deprehenditur, ſed hujuſmodi etiam, ut non ſemper ſolutionem admittat. Et quoniam, ſi quem uſum in reſolutione problematum habent ſeries infinitæ, is maximè cernitur, quotieſcumque illarum ſerierum finita ſumma invenitur; proinde oſtenſa geneſi ſerierum infinitarum, non abs re erit de earundem ſumma finita nonnihil hìc etiam ſubjungere. Quumque in hac re methodus generalis nequeat exhiberi; neceſſe eſt, ut variis exemplis, ac regulis ſpecialibus rem oſtendamus.

Primò itaque occurrunt ſeries illæ, quarum termini infiniti progreſſionem geometricam conſtituunt. Nam quo-

tieſcumque termini decreſcunt, ita, ut unuſquiſque ſit data quævis pars ſui antecedentis, facile erit eorum omnium ſummam invenire. Eſt autem hujus rei hoc quidem theorema generale: nempe quod ſi expoſitæ quantitatis b ſumatur pars, denominata ab a, hujusque iterum pars denominata ab a, atque ita continuò; quod inquam ſumma omnium ſit ejuſdem expoſitæ quantitatis pars denominata ab $a-1$: adeò, ut ſeries infinita $\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b}{a^3}+\frac{b}{a^4}$ &c. eundem valorem habeat, ac fractio iſta $\frac{b}{a-1}$.

Ad hoc theorema oſtendendum ſatis erit, methodo mox tradita in ſeriem infinitam convertere fractionem $\frac{b}{a-1}$. Itaque, quia diviſo b per a, multiplicatoque quotiente $\frac{b}{a}$ per diviſorem $a-1$, producitur quantitas iſta $b-\frac{b}{a}$, quæ ſiquidem ſubtrahatur ex quantitate dividenda, relinquet pro reſiduo quantitatem

$\frac{b}{a}$, divido ſecundò reſiduũ iſtud per a & quia multiplicato ſimiliter quotiente $\frac{b}{a^2}$ per diviſorem $a - 1$, ſubtractoque producto $\frac{b}{a} - \frac{b}{a^2}$ ex illo reſiduo, remanet $\frac{b}{a^2}$, divido tertiò novum iſtud reſiduum per a; atque ita procedendo in infinitum, prodibit pro quotiente ſeries infinita $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. Ex quo patet, ſeriem iſtam infinitam tantundem valere, ac $\frac{b}{a-1}$.

Hujus igitur theorematis ope facilè erit, ſummam finitam invenire progreſſionum geometricarum, quæ ſubinde decreſcunt in infinitum, ut quiſque terminus ſit data pars ſui antecedentis. Ex eo namque ſequitur primò, quod ſi expoſitæ quantitatis b ſumatur dimidium, atque hujus iterum dimidium, & ſic continuò in infinitum: ita, ut progreſſio geo-

metrica decreſcens conſtituatur, in qua quiſque terminus ſemiſſem ſui antecedentis adæquet; quod inquam ſumma omnium terminorum infinitorum ſit æqualis expoſitæ quantitati. Nam hoc caſu in generali illo theoremate a ſit 2: & quemadmodum ſeries infinita ſuperiùs inventa $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. mutatur in hanc aliam $\frac{1}{2}b + \frac{1}{4}b + \frac{1}{8}b + \frac{1}{16}b$ &c.; Ita & fractio $\frac{b}{a-1}$, quam adæquat ſeries illa, evadit ipſa quantitas b, quum ejus denominator æqualis fiat unitati.

Sequitur ſecundò, quod ſi expoſitæ quantitatis b ſumatur triens, atque hujus iterum triens, & ſic deinceps in infinitum: ita, ut progreſſio geometrica decreſcens conſtituatur, in qua quiſque terminus ſui antecedentis trientem adæquet; quod inquam ſumma omnium infinitorum terminorum ſit æqualis dimidio expoſitæ quantitatis. Nam ſemper ac in progreſſione geometrica decreſcente terminus ſubſequens trientem ſui ante-

cedentis adæquat, erit in generali illo theoremate a æqualis 3; & profectò ſicuti in hac hypotheſi ſeries illa infinita

$$\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4} \text{ \&c.}$$ vertitur in hanc

aliam $\frac{1}{3}b + \frac{1}{9}b + \frac{1}{27}b + \frac{1}{81}b$ &c.; ſic

& fractio $\frac{b}{a-1}$, cui ſeries illa eſt æqualis, mutatur in hanc aliam fractionem $\frac{1}{2}b$.

Sequitur tertiò, quod ſi expoſitæ quantitatis b ſumatur quadrans, hujuſque iterum quadrans, atque ita continuò in infinitum: adeo, ut progreſſio geometrica decreſcens conſtituatur, in qua quiſque terminus adæquet quadrantem ſui antecedentis; quod inquam ſumma omnium infinitorum terminorum ſit æqualis trienti expoſitæ quantitatis. Nam in progreſſione geometrica decreſcente terminus ſubſequens adæquat quadrantem ſui antecedentis. Itaque in generali illo theoremate a fiet 4: proindeque quemadmodum in iſta hypotheſi ſeries illa infini-

Digitized by Google

ta $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. mutatur in hanc aliam $\frac{1}{4}b + \frac{1}{16}b + \frac{1}{64}b + \frac{1}{256}b$ &c. ſic habebitur loco illius fractionis $\frac{b}{a-1}$ hæc alia $\frac{1}{3}b$.

Atque ita quoque ex generali illō theoremate colligere licet ſummam infinitorum terminorum progreſſionis geometricæ decreſcentis adæquare quartam, aut quintam partem expoſitæ quātitatis, ſi quiſque terminus progreſionis adæquet quintam, aut ſextam partem ſui antecedentis. Sed idem valet vi generalis theorematis, ſi quiſque terminus fuerit pars aliquāta ſui antecedentis. Ita ſi progreſſio talis fuerit, ut terminus ſequens adæquet duas tertias partes termini antecedentis; erit ſumma infinitorum terminorum æqualis duplo expoſitæ quantitatis. Nam quum in hac hypotheſi quantitas a fiat $\frac{3}{2}$, erit $a - 1$ æqualis $\frac{1}{2}$; atque adeo fractio $\frac{b}{a-1}$ erit $2b$.

Sed

Sed ſupponamus in generali illa fractione $\frac{b}{a-1}$, unde originem ſuam habuit infinita illa ſeries $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c., *a* unitatem repræſentare. Itaque habebitur in hoc caſu $a - 1$ æqualis zero, ſive nihilo; atque adeo fractio illa, veluti quotiens, qui oritur, dividendo quantitatem finitam *b* per zero, ſive nihilum, erit quantitas infinita. Unde diſcimus ſummam infinitorum terminorum in hac hypotheſi non eſſe finitam, ſed infinitam. Quod quidem perſpicuum eſt. Nam quotieſcumque *a* ponitur æqualis unitati, infinita illa ſeries mutatur in hanc aliam $b + b + b + b$ &c.: proindeque valor ejus, erit quantitas *b* infinities ſumpta. Unde, quia omnis quantitas finita, quotieſcumque ſumitur infinities, evadit infinita; erit valor illius ſeriei, hoc eſt ſumma omnium infinitorum terminorum non finita, ſed infinita.

Supponamus porrò in eadem illa generali fractione *a* numerum aliquem unitate minorem, puta ſemiſſem unitatis, deſignare. Et quoniam in hac hypo-

the-

theſi $a-1$ eſt $-\frac{1}{2}$, erit fractio illa $\frac{b}{a-1}$ æqualis quantitati negativæ $-2b$, proindeque ſumma infinitorum terminorum in hac hypotheſi prodit quidem finita, ſed negativa. Unde inſigne oritur paradoxum. Nam poſito, quod a deſignet ſemiſſem unitatis, infinita illa ſeries $\frac{b}{a}+\frac{b}{a^2}+\frac{b}{a^3}+\frac{b}{a^4}+$ &c. vertetur in hanc aliam $2b+4b+8b+16b$, &c.: proindeque, quia hujus progreſſionis termini, veluti creſcentes in infinitum, conſtituunt ſimul collecti quantitatem infinitam poſitivam, valebit quantitas finita negativa tantundem, ac quantitas infinita poſitiva.

Viciſſim autem eodem artificio colligere licet, quantitatem finitam poſitivam tantundem valere, ac quantitas infinita negativa. Nam ſi in fractione $\frac{b}{a-1}$ numeratorem b ſtatuamus negativum, ita ut loco illius fractionis habeatur hæc

alia

alia $\frac{-b}{a-1}$, ſeries inde emergens erit

$-\frac{b}{a}-\frac{b}{a^2}-\frac{b}{a^3}-\frac{b}{a^4}$ &c., hoc eſt ſimiliter negativa. Jam verò poſito, quod a deſignet ſemiſſem unitatis, fractio illa negativa ſit $2b$, & negativa illa ſeries mutatur in hanc aliam $-2b-4b-8b-16b$ &c. Itaque valor infinitorum terminorum ſeriei hujus negativæ erit quantitas finita poſitiva $2b$: & proinde, quia termini ejuſdem ſeriei, veluti creſcentes in infinitum, conſtituunt ſimul collecti quātitatem infinitam negativam, valebit quantitas finita poſitiva tantundem, ac quantitas infinita negativa.

Quum primùm in hæc myſteria inciderim, non aliunde ea oriri poſſe cæperam ſuſpicari, quam ab oppoſitione, quæ inter quantitatem poſitivam, & negativam reperitur. Itaque, quia ex iis, hoc ſequitur, quod quantitas poſitiva tantundem valeat, ac negativa infinities ſumpta; & ſimiliter quod quantitas negativa perinde ſit, ac poſitiva infinities accepta: illud exinde videbatur mihi colligi poſſe quantitatem poſitivam, & nega-

ga-

gativam ſubinde quidem opponi inter ſe mutuò, ut una reſpectu alterius veluti quantitas indefinitè parva eſſet habenda; quum nonniſi quantitas indefinitè parva infinities ſumpta producat quantitatem finitam. Nec verebar, hæc aſſerendo, in eorum opinionem incidere, qui quantitates negativas minores nihilo eſſe arbitrantur; quia eadem ratione tales quoque eſſent habendæ quantitates poſitivæ.

Quocirca non aliter ſe rem habere mecum ipſe reputabam, quàm in hunc, qui ſequitur, modum: nimirum quod tametſi quantitates negativæ ſint perinde reales, ac poſitivæ; attamen, quum inter ſe mutuò conferuntur, propter contrarietatem ſtatuum, in quibus reperiuntur, non minùs negativæ reſpectu poſitivarum, quàm poſitivæ in ordine ad negativas, velut indefinitæ parvæ, eſſent reputandæ. Cui equidem ſententiæ eò firmiùs adhærebam, quia exinde clarè etiam colligitur, inter quantitates poſitivas, & negativas non aliter proportionem conſiſtere poſſe, quam ſi duæ fuerint poſitivæ, & aliæ duæ negativæ; quum ſi tres priores ſumantur unius ſtatus, & quarta ſtatus contrarii, prima quidem ad ſecundam rationem habebit finitam; tertia verò

rò ad quartam ritionem, vel indefinitè magnam, vel indefinitè parvam obtinebit.

Sed re preſſiùs cōſiderata, falſitatem hujus ſyſtematis illicò novi. Nam quantitates poſitivæ per additionem negativarum decrementum patiuntur. Itaque neceſſe eſt, ut eæ ſint quantitates ejuſdem ordinis inter ſe; quia ſi quantitates negativæ eſſent indefinitæ parvæ reſpectu poſitivarum, iſtæ per illarum additionem minui ſanè non deberent. Quocirca eorum miſteriorum rationem ex aliis principiis deducendam eſſe conjeci: & quia clarè videbam fractionem illam generalem $\frac{b}{a-1}$ fieri $-2b$, quotieſcumque in ea ponitur a æqualis $\frac{1}{2}$; id tantùm ſedulò inquirendum exiſtimavi, an revera ſit infinita ſumma infinitorum terminorum hujus ſeriei $2b + 4b + 8b + 16b$ &c., in quam mutatur ſeris illa generalis $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4}$ &c. quotieſcumque ponitur a ſemiſſem unitatis repræſentare.

Et

Et quidem ſi ſeriei iſtius infinitæ $2b + 4b + 8b + 16b$ &c. ea ſit conſtitutio, ut ſicuti prior terminus eſt duplum expoſitæ quantitatis b, ita & quilibet alius duplum ſui antecedentis adæquet; nulli dubium eſſe poteſt, quin infinita ſit ſumma infinitorum ejus terminorum. Sed hujuſmodi eſſe conſtitutionem illius ſeriei in caſu noſtro, hoc quidem eſt falſum. Quum enim ſeries illa oriatur ex fractione generali $\frac{b}{a-1}$, in qua ponitur a ſemiſſem unitatis repræſentare, hoc eſt ex fractione $\frac{2b}{1-2}$, quæ tantundem valet, ac quantitas negativa $-2b$; natura illius ſeriei hæc eſt, ut ad quemcumque terminum elevetur, ſemper ab eodem per totidem terminos negativos deſcendere debeat, uſque donec perveniat ad $-2b$, ubi neque etiam ſiſtit, ſed deſcendit adhuc per terminos negativos

$$-b-\frac{1}{2}b-\frac{1}{4}b-\frac{1}{8}b-\frac{1}{16}b \text{ \&c.}$$

Qua ratione omnes ejus termini ſimul collecti conſtituunt quantitatem finitam ne-

negativam $- 2b$.

Itaque ratio illius paradoxi exinde eſt repetenda, quod ſeries infinita, quæ oritur ex fractione $\frac{2b}{1-2}$ non ſit ſimpliciter $2b + 4b + 8b + 16b$ &c. ſed $2b + 4b + 8b + 16b$ &c. $- 16b - 8b - 4b - 2b - b - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}b - \frac{1}{16}b$ &c.: adeo ut deletis terminis, qui contrarietate ſignorũ ſe mutuò deſtruunt, maneant tã-tũ $- b - \frac{1}{2}b - \frac{1}{4}b - \frac{1}{8}b - \frac{1}{16}b$ &c., qui ſimul collecti conſtituunt quantitatem finitam negativam $- 2b$. Atque hanc eſſe veram illius paradoxi rationem, exinde colligi poteſt, quia ſi loco fractionis $\frac{2b}{1-2}$ ſcribatur $\frac{-2b}{2-1}$, ſeries ex hac nova fractione emergens prodit ſub alia forma, nimirum talis, ad quam deletis terminis contrariis prior illa reducitur.

Eadem autem ratione ſeries infinita,

quæ

quæ oritur ex fractione $\frac{-2b}{1-2}$, non eſt ſimpliciter $-2b-4b-8b-16b$ &c., ſed $-2b-4b-8b-16b$ &c. $+16b+8b+4b+2b+b$ $+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}b+\frac{1}{16}b$ &c. Unde nil mirum, quod ſumma infinitorum terminorum illius ſeriei ſit quantitas finita poſitiva $2b$, quia ſcilicet deletis terminis, qui contrarietate ſignorum ſe mutuò deſtruunt, remanent tantùm $b+\frac{1}{2}b+\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}b+\frac{1}{16}b$ &c., qui ſimul collecti componunt quantitatem finitam poſitivam $2b$. Quod exinde etiam colligi poteſt, quia ſi loco fractionis $\frac{-2b}{1-2}$ ſcribatur $\frac{2b}{2-1}$, ſeries ex hac nova fractione emergens prodit ſub alia forma, nimirum talis, ad quam deletis terminis contrariis prior illa reducitur.

Jam ex his omnibus liquet ſummam infinitorum terminorum ſeriei, quæ ori-

tur

tur ex fractione generali $\frac{b}{a-1}$, eſſe quidem quantitatem finitam poſitivam, quotieſcumque *a* numerum unitate majorem deſignat; eſſe quantitatem infinitam, quum *a* unitatem adæquat; & eſſe demum quantitatem finitam negativam, quum *a* numerum unitate minorem repræſentat. Unde colligi poteſt, deceptum eſſe clariſſimum Walliſium, qui in hoc poſtremo caſu ſummam infinitorum terminorum eſſe quantitatem pluſquam infinitam exiſtimavit. Nam etſi quantitates iſtæ pluſquam infinitæ nullam contractionem involvant; quum ſicuti infiniteſimarum, ita & infinitorum diverſa genera diſtingui debeant: nihilominus in fractione $\frac{b}{a-1}$, quum *a* numerum unitate minorē repręſentat, tantum abeſt, ut ſumma infinitorum terminorum ſeriei inde emergentis ſit pluſquam infinita, ut neque etiam infinita dici poſſit, quum prodeat quantitas finita negativa.

Interim notare licet hoc loco, errorem clariſſimi Walliſii exinde ortum eſſe, quod crediderit cum Vulgo Algebriſta-

rum quãtitates negativas ſaltem reſpectu poſitivarum eſſe nihilo minores. Quod profectò ſi verum eſſet, rem protuliſſet, parem ingenio ſuo. Nam, quum noverit, ſummam infinitorum terminorum fieri infinitam, ubi *a* ponitur æqualis unitati, hoc eſt, ubi denominator fractionis evaneſcit; profectò neceſſe erat, ut eadem ſumma eſſet pluſquam infinita, ſi *a* poneretur unitate minor, & quantitates negativæ nihilo minores eſſent. Quocirca quum contrarium conſtet, & denominatore exiſtente negativo, ſumma infinitorum terminorum prodeat quantitas finita negativa; concludendum eſt, quantitates negativas eſſe nihilo majores perinde, ac ſunt quantitates poſitivæ; & zero, ſive nihilum eſſe ultimum terminum, ad quem quantitates decreſcendo poſſint perveniri.

Cæterùm, quum pro inveniendis ſummis finitis progreſſionum geometricarum decreſcentium, fundamentale ſit iſtud theorema, quod ſi fuerit progreſſio geometrica decreſcens $\frac{b}{a} + \frac{b}{a^2} + \frac{b}{a^3} + \frac{b}{a^4} +$ &c. ſumma omnium infinitorum termino-

Digitized by Google

rum ſit æqualis $\frac{b}{a-1}$; non abs re erit, aliam ejuſdem theorematis demonſtrationem in Tyronum gratiam hoc loco proferre: nimirum ſi vocetur $ſ$ ſumma omnium terminorum, quia ultimus terminus progreſſionis decreſcit in infinitum, atque adeo omnino evaneſcit, erit $ſ$ ſumma omnium antecedentium, & $ſ - \frac{b}{a}$ ſumma omnium conſequentium: proindeque, quia ſumma omnium antecedentium eſt ad ſummam omnium conſequentium, ut unus antecedentium ad unum conſequentium, erit $ſ$ ad $ſ - \frac{b}{a}$, ut $\frac{b}{a}$ ad $\frac{b}{a^2}$, ſive etiam, ut a ad 1. Unde, quum convertendo ſit, ut $ſ$ ad $\frac{b}{a}$, ita a ad $a-1$, erit ſumma omnium terminorum $ſ$ æqualis $\frac{b}{a-1}$.

III.

De ſeriebus, quarum termini progreſſionem arithmeticam conſtituunt.

SEquuntur ſeries, quarum termini progreſſionem arithmeticam conſtituunt. Iſtæ autem in infinitũ continuatæ numquam poterunt ſummam finitam exhibere. Nam ipſarum termini, vel augētur continuò, & veluti creſcentes in infinitum conſtituunt ſimul collecti quantitatem infinitam; vel continuò minuuntur, & quia non per numeros fractos, ſed per numeros negativos diminutionem patiuntur, neque etiam in unum additi component quantitatem finitam, ſed veluti continuò creſcentes in ſtatu negativo, conſtituent ſimul quantitatem infinitam negativam.

Interim, etſi ſumma infinitorum terminorum iſtarũ ſerierum, velut infinita, nequeat inveniri; attamen quam ſummam conſtituant quamplures termini, ſimul collecti, facile erit definire. Hunc in finem referat a primum terminum progreſſionis arithmeticæ, ſitque b differentia, qua termini progrediuntur. Itaque ſi pro-

ſi progreſſio fuerit creſcens, erit $a + b$ ſecundus terminus, $a + 2b$ terminus tertius, $a + 3b$ terminus quartus, atque ita deinceps. Unde, quum termini progreſſionis arithmeticæ creſcentis ſint a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c., liquet terminos illos oriri, addendo terminos progreſſionis a, a, a, a, &c. cum terminis alterius hujus progreſſionis $0b$, $1b$, $2b$, $3b$ &c.

Quocirca, ut addantur in unum quotcumque termini progreſſionis arithmeticæ creſcentis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c., ſatis erit in unum colligere terminos totidem tam progreſſionis a, a, a, a &c., quàm progreſſionis $0b$, $1b$, $2b$, $3b$ &c. Et quidem quantum ad primam, quia coefficientes ſuorum terminorum ſunt unitates 1, 1, 1, 1 &c., ſi in ea colligendi ſint in unum termini totidem, quot deſignat numerus m, erit ma omnium ſumma. Sed quantum ad ſecundam, quia coefficientes ſuorum terminorum ſunt numeri naturales 0, 1, 2, 3, &c., ſi in ea proponantur colligendi in unum termini totidem, quot repræſentat numerus m, erit omnium ſumma $\frac{mm - m}{2} b$.

Quod ut liquido conſtet, præmittenda

eſt prius pulcherrima numerorum naturalium proprietas : nimirum , quod ſi numeri naturales incipiant à zero , ſumma quotcumque terminorum ſit ad ſummam terminorum totidem ultimo æqualium, ut 1 ad 2 . Ita ſumma quatuor terminorum 0 , 1 , 2 , 3 eſt 6 , & ſumma terminorum totidem æqualium ultimo 3 eſt 12 . Similiter ſumma terminorum quinque 0 , 1 , 2 , 3 , 4 eſt 10 , & ſumma ex totidem terminis , quorum quiſque ſit æqualis ultimo 4 , eſt 20.

Hac numerorum naturalium proprietate ſuppoſita, facile erit oſtendere in progreſſione 0*b* , 1*b* , 2*b* , 3*b* &c. , ſummam terminorum totidem , quot deſignat numerus *m*, eſſe $\frac{mm - m}{2} b$. Nam quum *m* ſit numerus terminorum in unam ſummam colligendorum , erit $\overline{m - 1}b$ ultimus terminus . Quare ſi terminus iſte multiplicetur per *m* , hoc eſt capiatur toties , quot ſunt unitates in *m* ; erit ſumma invenienda ad $\overline{mm - m}\, b$, ut 1 ad 2: proindeque ſi ipſius $\overline{mm - m}\, b$ ſemiſſis capiatur , erit $\frac{mm - m}{2} b$ ſumma quæſita.

At-

Digitized by Google

Atque hinc liquet modò, progreſſionis arithmeticæ creſcentis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c. ſummam terminorum totidem, quot deſignat numerus m, eſſe $ma + \frac{mm - m}{2} b$. Unde cognito priori termino progreſſionis, & cognita item differentia, qua termini progrediuntur; facile erit, terminos quotcumque ejuſdem progreſſionis in unam ſummam colligere. Capiatur etenim prior terminus toties, quot ſunt termini in unum addendi; tum ei addatur differentia progreſſionis toties, quot deſignat ſemiſſis producti ex eodem numero terminorum in ſe ipſum unitate multatum, & habebitur ſumma quæſita.

Oporteat, exempli gratia, in unam ſummam colligere terminos decem progreſſionis arithmeticæ creſcentis, cujus terminus prior ſit 2, differentia autem 3. Capiatur decuplum prioris termini 2, ſcilicet 20. Et quoniam id, quod producitur, multiplicando numerum terminorum 10 per eundem numerum unitate multatum 9, eſt 90; erit 45 ſemiſſis hujus producti, atque adeo differentia 3, toties ſumpta, erit 135. Quare ſumma quæſita erit $20 + 135$, hoc eſt 155.

Quod ſi progreſſio arithmetica fuerit decreſcens, poſito rurſus, quod a ſit prior terminus progreſſionis, & b differentia, qua termini progrediuntur; erit $a - b$ ſecundus terminus; $a - 2b$ terminus tertius, $a - 3b$ terminus quartus, atque ita deinceps. Unde quum termini progreſſionis arithmeticæ decreſcentis a, $a - b$, $a - 2b$, $a - 3b$ &c. oriantur ſubtrahendo terminos progreſſionis $0b$, $1b$, $2b$, $3b$, $4b$ &c. ex terminis alterius hujus progreſſionis a, a, a, a &c., invenietur eodem ratiocinio, ſummam terminorum totidem illius progreſſionis arithmeticæ, quot deſignat numerus m, eſſe quantitatem iſtam $ma - \frac{mm + m}{2} b$.

Ex quo rurſus cognito priori termino progreſſionis arithmeticæ decreſcentis, & cognita item differentia, qua termini progrediuntur, facile erit terminos quotcumque ejuſdem progreſſionis in unam ſummam colligere. Capiatur ſiquidem prior terminus toties, quot ſunt termini in unum addendi; tum ex eo ſubducatur differentia progreſſionis toties, quot deſignat ſemiſſis producti ex eodem numero terminorum in ſe ipſum unitate mul-

multatum ; & habebitur ſumma quæſita.

Proponantur, exempli gratia, in unam ſummam colligendi termini decem progreſſionis arithmeticæ decreſcentis, cujus terminus prior ſit 6, differentia autem terminorum 3. Capiatur decuplum prioris termini 6, ſcilicet 60. Et quoniam id, quod producitur multiplicando numerum terminorum 10 per eundem numerum unitate multatum 9, eſt 90 ; erit 45 ſemiſſis hujus producti, atque adeo diffeerentia 3, toties ſumpta, erit 135. Quare ſumma quæſita erit 60 — 135, hoc eſt — 75.

Hinc autem facilè quoque erit oſtendere id, quod initio hujus articuli dictum eſt : nempe ſeries, quarum termini progreſſionem arithmeticam, ſive creſcentem, ſive decreſcentem conſtituunt, in infinitum continuatas, numquam poſſe ſummam finitam exhibere. Nam in progreſſione arithmetica creſcente a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$ &c. ſumma totidem terminorum, quot deſignat numerus m, eſt $ma + \frac{mm - m}{2} b$; pariterque in progreſſione arithmetica decreſcente a, $a - b$, $a - 2b$

Digitized by Google

$a - 2b$, $a - 3b$ &c. ſumma aliorum totidem terminorum eſt $ma - \frac{mm + m}{2} b$. Unde, quia utraque quantitas fit infinita, quotieſcumque multitudo terminorum, in unam ſummam colligendorum, quam deſignat numerus m, ponitur infinita; conſequens eſt, ut termini cujuſcumque progreſſionis arithmeticæ in infinitum continuatæ, ſimul collecti, infinitam quantitatem conſtituant.

Sed perſpicuum eſt quoque, eandem ſummam infinitorum numero terminorum eſſe quantitatem infinitam poſitivam, quotieſcumque termini progreſſionis perpetuò creſcunt; eſſe verò quantitatem infinitam negativam, quum iidem termini continuò decreſcunt. Nam, quum multitudo terminorum, in unam ſummam colligendorum, infinita ponitur; termini illi, in quibus reperitur prima poteſtas ipſius m, erunt indefinitè parvi reſpectu ejus, in quo ejuſdem m quadratum, ſive ſecunda poteſtas reperitur: proindeque quia abſque ullo errore negligi poſſunt, erit ſumma omnium infinitorum terminorum $\frac{mmb}{2}$, quotieſcumque ter-

termini perpetuò creſcunt, & verò erit $\frac{mmb}{2}$, quum iidem termini decreſcunt indeſinenter.

Atque ita aliud agentes, in hoc incidimus theorema, univerſalitate ſua à nemine adhuc adnotatum, nempe quod ſumma omnium infinitorum terminorũ cujuſcumque progreſſionis arithmeticæ, ſive creſcentis, ſive decreſcentis, ſit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2. Eſt enim ſumma omnium infinitorum terminorum progreſſionis arithmeticæ creſcentis a, $a + b$, $a + 2b$, $a + 3b$, $a + 4b$ &c. ſemiſſis iſtius quantitatis mmb, ubi m multitudinem infinitam deſignat. Sed maximus terminus illius progreſſionis eſt $a + mb$, ſive etiam mb; quum a reſpectu ipſius mb, velut quantitas indefinitè parva, evaneſcat. Itaque eadem ſumma erit ſemiſſis infinitorum terminorum maximo æqualium. Quod etiam verum eſſe in progreſſione arithmetica decreſcente, nemo non videt.

Non me latet, elegans iſtud theorema, cujus inſignis eſt uſus in geometricis, innotuiſſe iis, qui infinitorum tra-

Google

tractarunt Arithmeticam, in uno caſu ſpeciali, nempe quum termini progreſſionis arithmeticæ ſunt numeri naturales; ſed univerſalitatem ejus, quantum ſciam, nemo hactenus adnotavit. In numeris autem naturalibus, veritatem dicti theorematis, facile erit oſtendere. Nam inter alias numerorum naturalium proprietates, ut ſuperiùs vidimus, hæc etiam recenſetur, quod quum ii incipiunt à zero, ſive nihilo, ſumma quotcumque terminorum ſit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium, ut 1 ad 2. Itaque quum iidem numeri incipiunt ab unitate, maximus terminus ſumi debet toties, quota eſt multitudo terminorum unitate aucta, ut terminorum omnium ſummæ duplum habeatur. Sed quum multitudo terminorum eſt infinita, ea per unitatem unam non augetur. Itaque in iſto caſu ſatis erit, maximum terminum toties ſumere, quota eſt ipſa terminorum multitudo: & propterea ſumma omnium terminorum progreſſionis arithmeticæ, ab unitate per numeros naturales in infinitum continuatæ, ſubdupla erit ſummæ terminorum totidem, quorum quiſque maximum adæquet.

Sed non abs re erit hoc loco paucis inque-

nuere rationem illius proprietatis, quæ in numeris naturalibus cernitur, nempe quod quum ii incipiunt à zero, ſive nihilo, ſumma quotcumque terminorum ſit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2. Pendet itaque proprietas iſta ex hoc theoremate, nulli non cognito, quod ſumma quotcumque terminorum cujuſcumque progreſſiomis arithmeticæ habeatur, ſi ſumma extremorum multiplicetur per multitudinem terminorum dimidiatam. Hinc enim ſequitur, eandem ſummam terminorum ſubduplam eſſe ſummæ extremorum acceptæ toties, quota eſt ipſa terminorum multitudo: proindeque quia numeri naturales conſtituunt progreſſionem arithmeticam, & quum ii incipiunt à zero, ſumma extremorum eſt ipſe maximus terminus; liquet ſummam quotcumque numerorum naturalium, à zero incipientium ſubduplam eſſe ſummæ terminorum totidem æqualium maximo.

Perſpicuum eſt autem, proprietatem iſtam numeris naturalibus non alia ratione competere, quàm quia conſtituunt progreſſionem arithmeticam, cujus prior terminus eſt zero, ſive nihilum.

Un-

Unde ſi qui ſint alii numeri, qui ſimiliter à zero incipientes, progreſſionem conſtituant arithmeticam, eos eandem proprietatem habere, non eſt, quod in dubiũ poſſit revocari: proindeque theorema enunciari poteſt generaliter in hunc modum, quod ſumma quotcumque terminorum progreſſionis arithmeticæ cujuſcumque, à zero inchoatæ, ſubdupla ſit ſummæ terminorum totidem maximo æqualium. Sic ſumma iſtorum terminorum 0, 2, 4, 6, 8 eſt 20, & ſumma terminorm totidem æqualium maximo 8 eſt 40. Similiter ſumma iſtorum terminorum 0, 3, 6, 9, 12 eſt 30, & ſumma ex totidem terminis, quorum quiſque adæquet maximum 12, eſt 60.

IV.

De ſeriebus infinitis, quarum termini ſunt numeri figurati numerorum naturalium.

Nunc conſiderandæ nobis erunt ſeries illæ infinitæ, quarum termini ſunt numeri, qui vulgò dicuntur figurati: Qua in re exibenda eſt priùs iſtorum numerorum brevis quædam idea. Et quoniam eorum conſideratio profecta eſt ex con-

contemplatione numerorum multangulorum, ab ipſis Veteribus facta; proinde qui ſint numeri multanguli, ſive polygoni, ante omnia explicandum nobis erit.

Numeri multanguli, ſive polygoni dicuntur, qui oriuntur ex continua collectione aliorũ, æquali intervallo ab unitate progredientium; & pro diverſitate hujus intervalli, variæ diſtinguuntur numerorum multangulorum ſpecies; nam dicuntur trianguli, ſi intervallum ſit unitas; dicuntur quadrati, ſi intervallum ſit binarius; dicuntur pentagoni, ſi idem intervallum ſit ternarius; atque ita deinceps.

Hac ratione, ſi numeri ab unitate æquali intervallo progredientes ſint ipſi numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c., quia intervallum, quo numeri progrediuntur, eſt unitas, habebuntur ex eorum continua collectione omnes numeri trianguli. Qua ratione 1 erit primus triangulus; 1 + 2, ſive 3 erit triangulus ſecundus; 1 + 2 + 3, ſive 6 triangulus tertius; atque ita in infinitum.

Quod ſi numeri ab unitate æquali intervallo progredientes ſint numeri impares naturales 1, 3, 5, 7, 9 &c., quia inter-

tervallum, quo numeri progrediuntur, eſt numerus binarius, orientur ex continua illorum collectione omnes numeri quadrati. Qua ratione 1 erit primus quatus; 1 + 3, ſive 4 erit quadratus ſecundus; 1 + 3 + 5, ſive 9 quadratus tertius; atque ita continuò.

Sed ſi porrò ſeries numerorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, ſit 1, 4, 7, 10, 13 &c., quia intervallum, quo numeri progrediuntur eſt numerus ternarius, orientur ex eorum collectione continua omnes numeri pentagoni. Qua ratione 1 erit primus pentagonus; 1 + 4, ſive 5 erit pentagonus ſecundus; 1 + 4 + 7, ſive 12 pentagonus tertius; & ſic in infinitum.

Hos numeros polygonos, ſive multangulos, prout ex Veterum monumentis colligere licet, conſideravit primùm Hypſicles, qui geneſim ipſorum hac definitione complexus eſt: ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes; ſumma omnium erit ttiangulus, ſi intervallum ſit unitas; quadratus, ſi binarius; pentagonus, ſi ternarius; atque ita deinceps.

Et quoniam numerus angulorum in hac Hypſiclis definitione per numerum bi-

binario majorem intervallo, quo numeri ab unitate progrediuntur, deſignatur; proinde Diophantus eandem illam definitionem ſic generaliter concepit: ſi fuerint quotcumque numeri, ab unitate æquali intervallo progredientes, omnium ſumma multangulus erit, totque angulos continebit, quot numerus, binario ſuperans intervallum, habet unitates.

Hujuſmodi porrò numeri dicti ſunt multanguli, ſive polygoni, quia ipſorũ unitates per æqua intervalla in polygoni æquilateri formam diſponi poſſunt: nimirum numeri trianguli in formam trianguli æquilateri; numeri quadrati in formam quadrati, aut etiam rhombi, atque ita de aliis. Unde definiri quoque poſſunt numeri multanguli, ſive polygoni, quorum unitates æqualibus intervallis multangulum, ſive polygonum æquilaterum exhibent.

Jam quemadmodum Veteres conſiderarunt numeros, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, eoſque multangulos, ſive polygonos numeros appellarunt, quia unitates ipſorum, per æqua intervalla diſpoſitæ, multangulum, ſive polygonum æquilaterum repræſentãt. Sic

Recentiores, ulteriùs progreſſi, conſideraruntt numeros alios, qui generantur ex continua ipſorum multangulorum, indeque ortorum numerorum additione, vel collectione; & tam hos, quàm illos figuratos appellarunt, quia ſcilicet unitatibus ipſorum, per æqua intervalla diſpoſitis, diverſimode poſſunt configurari.

Quocirca numeri figurati dicuntur, non modò ii, qui oriuntur ex continua collectione aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium; verùm etiam qui ex continua inde ortorum numerorũ additione generantur. Ex quo patet, numeros iſtos figuratos non modò in varia genera diſtingui poſſe, pro diverſitate intervalli, quo numeri genitores, hoc eſt ab initio aſſumpti ab unitate prograediuntur; ſed & ipſos cujuſque generis numeros in varios ordines dividi poſſe, pro diverſa ratione, qua ex iiſdem illis numeris genitoribus, ſive ab initio aſſumptis generari intelliguntur.

Sed hic non alios nos numeros figuratos conſiderabimus, quàm qui ſunt generis primi, quique oriuntur à numeris, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur. Atque eos in certos ordines ita dividemus, ut quemadmodum dicun-

cuntur numeri genitores ipſi illi numeri, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur;ita dici debeant numeri figurati primi ordinis, qui oriuntur ex additione continua numerorum genitorum; numeri figurati ſecundi ordinis, qui oriuntur ex collectione continua eorum, qui ſunt ordinis primi; numeri figurati tertii ordinis, qui gignuntur ex continua collectione eorum,qui ſunt ordinis ſecundi; atque ita deinceps.

Conſiderandæ ſunt igitur nobis hoc loco ſeries, quarum termini, aut etiam coefficientes terminorum ſunt numeri iſti figurati generis primi. Et quoniam hujuſmodi numeri oriuntur ex collectione continua numerorum naturalium, eorũque inde ortorum numerorum; profectò ſicuti omnes numeri naturales, in unum collecti, conſtituunt quantitatem infinitam; ita multò magis quantitas infinita orietur, quum numeri omnes figurati, cujuſcumque ſint ordinis, in unam ſummam ſunt colligendi. Sed nihilominus ſicuti in unum colligere licet terminos quotcumque numerorum naturalium, ob proprietatem illam, quod ſi iis zero præfigatur, ſumma terminorum aliquot ſit ad ſummam terminorum totidẽ

maximo æqualium in ratione ſubduplaз ita ptopter proprietates quaſdam non diſſimiles, quæ in numeris illis figuratis occurrunt, poterit quotcumque illorum numerorum finita ſemper ſumma inveniri.

Nimirum, quemadmodum in numeris naturalibus, qui ſunt genitores numerorum figuratorum, quos hìc conſideramus, præfixo unitati, ſive primo termino unico zero, ſumma terminorum aliquot erit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut unitas ad binarium. Ita in numeris figuratis, qui ex collectione numerorum naturalium oriuntur, ſi primo termino tot zero præfigantur, quot deſignat exponens ordinis numerorum figuratorum, auctus unitate una, hoc eſt, duo in numeris figuratis ordinis primi, tria in numeris figuratis ordinis ſecundi, atque ita deinceps; ſumma terminorum aliquot erit ad ſummam ex totidem terminis, quorum quiſque maximum adæquet, ut unitas ad eundem exponentem, auctum duabus unitatibus, hoc eſt, ut 1 ad 3 in numeris figuratis ordinis primi, ut 1 ad 4 in numeris figuratis ordinis ſecundi, atque ita continuò.

Hac

Hac ratione numeri figurati ordinis primi ; qui ſcilicet oriuntur ex collectione continua numerorum naturalium, ſunt 1, 3, 6, 10, 15, 21 &c., & ſi iis duplex zero præfigatur, ac in unum addantur quinque termini, erit eorum ſumma 10, & ſumma terminorum totidem, æqualium maximo 6, erit 30. Similiter numeri figurati ordinis ſecundi, qui ſcilicet oriuntur ex additione continua numerorum figuratorum primi ordinis, ſunt 1, 4, 10, 20, 35, 56 &c., & ſi iis triplex zero præfigatur, addanturque termini ſeptem, erit eorum ſumma 35, & ſumma terminorum totidem æqualiū maximo 20, erit 140. Atque ita quoque quia numeri figurati ordinis tertii ſunt 1, 5, 15, 35, 70, 126 &c., perſpicuum eſt, quod ſi iis quatuor zero præfigantur, colliganturque in unum termini novem, ſumma eorum fit 126, & ſumma ex terminis totidem, quorum quiſque adæquet maximum 70, ſit 630.

Hac numerorum figuratorum proprietate ſuppoſita, facile erit eorundem quotcumque terminos in unam ſummam colligere. Incipiemus autem ab ipſis numeris naturalibus, qui ſunt genitores numerorum figuratorum, quos hìc conſideramus.

Itaq; ſi numerorum naturalium colligendi ſint in unam ſummam tot termini, quot deſignat numerus m, erit ultimus, ſive maximus terminus ipſe numerus m, vel etiam $\frac{m}{1}$. Sed præfixo numeris iſtis unico zero, ſumma quotcumque terminorum fit ſubdupla ſummæ terminorum totidem maximo æqualium. Quare ſi maximus ille terminus capiatur toties, quot unitates continet $m + 1$, & producti inde orti capiatur ſemiſſis, erit ſūma quæſita $\frac{m.m+1}{1.2}$, hoc eſt $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$; nam puncta quantitatibus interjecta multiplicationem earum quantitatum hoc loco deſignant.

Proponantur ſecundò in unam ſummam colligendi termini totidem numerorum figuratorum primi ordinis, quot deſignat idem numerus m. Et quoniam numeri figurati primi ordinis, de quibus hìc loquimur, oriuntur ex additione continua numerorum naturalium, erit ultimus, ſive maximus terminus $\frac{m.m+1}{1.2}$: Jam verò ſi numeris figuratis pri-

primi ordinis duplex zero præfigatur; ſumma terminorum aliquot ſit ſubtripla terminorum totidem maximo æqualium. Itaque ſi maximus ille terminus toties capiatur, quot unitates continet $m + 2$, & producti inde orti ſumatur triens, erit $\frac{m \cdot m+1 \cdot m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$, ſumma, quam oportet invenire.

Proponantur tertiò in unum addendi tot termini numerorum figuratorum ordinis ſecundi, quot deſignantur ab eodẽ numero m. Quia ergo numeri figurati ſecundi ordinis oriuntur ex continua collectione eorum, qui ſunt ordinis primi, erit ultimus, ſive maximus terminus $\frac{m \cdot m+1 \cdot m+2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Sed numerorum figuratorum ſecundi ordinis ea eſt proprietas, ut ſi iis triplex zero præfigatur, ſumma quotcumque terminorum ſit ſubquadrupla ſummæ ex totidem terminis, quorum quiſque maximum adæquet. Igitur ſi maximus ille terminus toties accipiatur, quot unitates continet $m + 3$, & producti inde orti quadrans capiatur, erit

$$\frac{m \cdot m+1 \cdot m+2 \cdot m+3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ ſumma quæſita.}$$

Non diſſimili ratione colligi poterunt in unam ſummam termini quotcumque numerorum figuratorum ſuperiorum ordinum. Sed notetur hoc loco velim, ſummas iſtas deſignari per duplicem progreſſionem arithmeticam, utramque aſcendentem per unitatis incrementum, unam à multitudine aſſumpta terminorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminis conſtantem, quot deſignat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus. Unde ad eaſdem illas ſummas inveniendas poterit generaliter hæc regula adhiberi.

Nimirum fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, ambæ aſcendentes per unitatis incrementum, una quidem à multitudine terminorum in unam ſummam colligendorum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot deſignat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus. Multiplicentur deinde inter ſe mutuò tam termini prioris progreſſionis, quàm termini alterius; & diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, erit quotiens terminorum ſum-

ſumma quæſita. Ita ſi in unam ſummam ſint colligendi decem termini numerorum figuratorum ordinis primi, progreſſionum conſtituendarum una erit 10, 11, 12, altera 1, 2, 3. Et quia id, quod oritur, multiplicando ſimul terminos illius, eſt 1320; id verò, quod producitur ex multiplicatione terminorum alterius hujus progreſſionis, eſt 6; divido 1320 per 6, & erit 220 ſumma quæſita.

Jam quemadmodum ſumma numerorũ omnium naturalium eſt ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut unitas ad binarium; ita ſumma numerorum omnium figuratorum cujuſque ordinis eſt ad ſummam ex totidem terminis, quorum quiſque maximum adæquet, ut unitas ad exponentem ordinis eorum numerorum, duabus unitatibus auctum. Nam numerorum figuratorum, ut ſuperiùs vidimus, ea eſt proprietas, ut ſumma terminorum aliquot ſit ad maximum terminum toties ſumptum, quot deſignat multitudo terminorum, aucta non modò unitatibus exponentis, verùm etiam una adhuc, ut eſt unitas ad ipſum exponentẽ, duabus unitatibus auctum. Sed quum mul-

multitudo terminorum ponitur infinita; ea per unitates exponentis, & alteram illam adhuc ſuperaddendam non augetur. Itaque, quia in hoc caſu ſatis erit maximum terminum toties ſumere, quota eſt ipſa terminorum multitudo; conſequens eſt, ut ſumma numerorum omnium figuratorum cujuſque ordinis ſit ad ſummam terminorum totidem maximo æqualium, ut eſt unitas ad exponentem ordinis numerorum, duabus unitatibus auctum.

Ut autem numerorum figuratorum proprietatem illam oſtendamus; demonſtrandum eſt priùs hoc theorema: nempe, quod ſi fuerit ſeries quædam numerorum a, b, c, d &c., quorum ea ſit proprietas, ut ſumma terminorum quotcumque ſit ad terminum ultimum toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitatibus m, perpetuò ut unitas ad numerum n; & e, f, g, h &c. ſit alia ſeries numerorum, qui ex illarum continua collectione oriantur: quod inquam in hac alia ſerie ſumma quotcumque terminorum ſit ad terminum ultimum toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m + 1$, ut eſt unitas ad numerum $n + 1$.

Neque verò difficile erit, theorema iſtud oſten-

oſtendere. Nam ex hypotheſi a eſt ad $\overline{m+1}\,a$, ut 1 ad n; & ſimiliter in hac eadem ratione eſt quoque, non modò $a+b$ ad $\overline{m+2}\,b$, verùm etiam $a+b+c$ ad $\overline{m+3}\,c$, & $a+b+c+d$ ad $\overline{m+4}\,d$. Itaque, conjungendo ſimul, tam omnes antecedentes, quam omnes conſequentes, erit $4a+3b+2c+d$ ad $\overline{m+1}\,a+\overline{m+2}\,b+\overline{m+3}\,c+\overline{m+4}\,d$, ut 1 ad n; atque adeo componendo erit, ut $4a+3b+2c+d$ ad $\overline{m+5}\;\overline{a+b+c+d}$, ita 1 ad $n+1$. Jam verò, quum numeri e, f, g, h oriuntur ex collectione continua numerorum a, b, c, d; $4a+3b+2c+d$ eſt idem, ac $e+f+g+h$, & $a+b+c+d$ perinde valet, ac h. Quare erit, ut $e+f+g+h$ ad $\overline{m+5}\,h$, ita 1 ad $n+1$; hoc eſt, ut ſumma quatuor terminorum e, f, g, h ad ultimum terminum h acceptum toties, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitatibus $m+1$, ita unitas ad numerum $n+1$.

Hoc oſtenſo theoremate, proprietas illa numerorum figuratorum ſua ſponte ſequitur. Nam numeri figurati primi ordinis oriuntur ex additione continua

na-

numerorum naturalium. Sed horum numerorum, ut ſuperiùs oſtenſum fuit, ea eſt proprietas, ut ſumma terminorum aliquot ſit ad terminum ultimum toties acceptum, quota eſt ipſa multitudo, aucta unitate una, ut 1 ad 2. Itaque in numeris figuratis primi ordinis ſumma terminorum quotcumque erit ad terminum ultimum toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, duabus unitatibus aucta, ut eſt 1 ad 3. Unde porrò, quia numeri figurati ſecundi ordinis oriuntur ex continua collectione eorum, qui ſunt ordinis primi, erit in iis ſumma terminorum aliquot ad terminum ultimum toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo tribus unitatibus aucta, ut 1 ad 4. Atque ita gradatim numerorum figuratorum aliorum ordinum proprietates deducentur.

Sed nolo hic ſilentio præterire, proprietatem illam numerorum naturalium, quam ſuperiùs ob naturam progreſſionis arithmeticæ demonſtratam dedimus, colligi quoque poſſe ex theoremate mox à nobis oſtenſo. Oriuntur ſiquidem numeri naturales ex continua collectione unitatum. Jam verò in ſerie unitatum ſumma terminorum aliquot eſt ad terminum ulti-

ultimum toties ſumptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitate nulla, in ratione æqualitatis, hoc eſt ut 1 ad 1. Itaque in ſerie numerorum naturalium ſumma quotcumque terminorum eſt ad terminum ultimum toties acceptum, quota eſt ipſa terminorum multitudo, aucta unitate una, in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2.

V.

De ſeriebus infinitis, quarum termini ſunt poteſtates numerorum naturalium.

PRoximum eſt, ut eas contemplemur ſeries infinitas, quarum termini ſunt poteſtates, hoc eſt quadrata, cubi, quadrato-quadrata numerorum naturalium. Et quamquam hujuſmodi ſeries tales etiam eſſe conſtet, ut in infinitum continuatæ, numquam poſſint ſummam finitam exhibere; quum & ipſi numeri naturales, ſi omnes colligantur in unum, infinitam conſtituant quantitatem. Utilis tamen eſt earum ſerierum contemplatio: quia tametſi ſumma omnium infinitorum terminorum, velut infinita, haberi

Digitized by Google

beri non poſſit; nihilominus, quæ ſumma oriatur ex quampluriuni terminorū additione, facile erit definire.

Ad has ſummas definiendas magnopere conferunt ſummæ jam determinatæ numerorum figuratorum, qui ex numeris naturalibus oriuntur. Nam etſi, qui infinitorum tractarunt Arithmeticam, primò ſummas quadratorum, cuborum, aliarumque poteſtatum numerorum naturalium inveſtigaverint, deinde verò ad definiendas ſummas numerorum figuratorum pertranſierint. Naturæ tamen rei longè meliùs convenire videtur, ſi primò quidem numerorum figuratorum ſummæ determinentur, poſtea verò ad poteſtatum ſummas inveſtigandas deſcendatur; quandoquidem ex cognitis ſummis figuratorum ſummæ poteſtatum nullo negotio deducuntur.

Itaque quum à nobis ſummæ numerorum figuratorum jam ſint determinatæ, videamus, qua ratione mediantibus iis ſummæ poteſtatum poſſint definiri. Et quidem, quia primæ poteſtates numerorum naturalium ab ipſis numeris naturalibus non differunt; quum prima poteſtas cujuſque quantitatis ſit ipſa quantitas ſemel poſita: ſit hinc, ut ad inveniendam

dam ſummam primarum poteſtatum numerorum naturalium, ſatis ſit ipſos naturales numeros in unam ſummam colligere: proindeque ſi quilibet numerus naturalis indefinitè deſignetur per m, erit $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$ ſumma omnium m; quia ſcilicet hæc eadem quantitas inventa eſt ſuperiùs pro ſumma numerorum totidem naturalium, quot deſignat numerus m.

Proponatur ſecundò invenienda ſumma quadratorum, ſive ſecundarum poteſtatum numerorum naturalium. Et jam ſi m referat indefinitè quemcumque numerum naturalem, deſignabit etiam indefinitè $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$ quemcumque numerum figuratum ordinis primi. Sed ſumma indefinita omnium numerorũ figuratorũ primi ordinis eſt $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$. Itaque hæc eadem quantitas erit ſumma omnium $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$; & conſequenter eadem quantitas duplicata erit ſumma om-

omnium $mm + m$. Jam verò ſumma omnium m eſt $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$. Quare ſi ex quantitate illa duplicata, hæc alia ſubducatur, erit reſiduũ $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$ ſumma omnium quadratorum mm.

Proponatur tertiò invenienda ſumma ex cubis, ſive tertiis poteſtatibus numerorum naturalium. Quoniam m refert indefinitè quemcumque numerum naturalem, deſignabit etiam indefinitè $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$ quemcũque numerum figuratum ordinis ſecũdi. Sed ſumma indefinita numerorum figuratorũ ſecundi ordinis eſt $\frac{1}{24}m^4 + \frac{1}{4}m^3 + \frac{11}{24}m^2 + \frac{1}{4}m$. Itaque hæc eadem quantitas erit, ſumma omnium $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$; & conſequenter eadem quantitas ſextuplicata erit ſumma omnium $m^3 + 3m^2 + 2m$. Jam verò, quia ſumma omnium m in-

inventa eſt $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$, erit ſumma omnium $2m$ æqualis $m^2 + m$; & ſimiliter, quia ſumma omnium m^2 inventa eſt $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$, erit ſumma omnium $3m^2$ æqualis $m^3 + \frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$. Itaque ſi ex quantitate illa ſextuplicata hæ aliæ duæ ſubducantur, erit reſiduum $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$ ſūma omniū m^3.

Non diſſimili methodo ad altiores gradatim poteſtates pergere licet, earundemque ſummas ex definitis ſummis numerorum figuratorum ordinis ſuperioris determinare. Sed ut uno, aut altero exemplo illuſtremus id, quod generaliter, ac indefinitè definivimus, proponatur invenienda ſumma quadratorum ex primis ſex numeris naturalibus. Quoniam quadratorum ſumma indefinita eſt $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$, ſatis erit in hac formula generali valorem ipſius m ſubſti-

tuere. Itaque, quia m eſt 6, erit ſextans ipſius m æqualis 1; & ſimiliter, quia m^2 eſt 36, erit ſemiſſis ipſius m^2 æqualis 18; atque ita quoque, quia m^3 eſt 216, erit triens ipſius m^3 æqualis 72. Quare ſumma quæſita erit 72 + 18 + 1, hoc eſt 91.

Oporteat quoque invenire ſummam cuborum, qui fiunt ex iiſdem primis ſex numeris naturalibus. Quoniam ſumma indefinita cuborum deſignatur per

$$\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2,$$

ubi m ponitur quemcumque numerum naturalem repræſentare, ſufficiet in hac formula generali valorem ipſius m ſubrogare. Quocirca, quia m eſt 6, erit mm 36, atque adeo quadrans ipſius mm erit 9. Et quoniam m^3 eſt 216, erit ſemiſſis ipſius m^3 æqualis 108. Ac denique quia m^4 eſt 1296, erit quadrans ipſius m^4 æqualis 324. Qua ratione ſubrogatis omnibus hiſce valoribus in formula illa generali, erit 324 + 108 + 9, hoc ex 441 ſumma quæſita.

Jam quemadmodum ſumma indefinita numerorum naturalium $\frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m$

eſt

eſt tantùm $\frac{1}{2}m^2$, quum numerus m ponitur infinitus : unde ſequitur, ſummam numerorum omnium naturalium eſſe ad ſummam totidem maximo æqualium in ratione ſubdupla, hoc eſt, ut 1 ad 2. Ita quoque ſumma indefinita quadratorum, quæ fiunt ex numeris naturalibus $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$, erit tantùm $\frac{1}{3}m^3$, ubi ponitur m multitudinem infinitam repræſentare : ex quo colligere licebit hoc theorema, quod ſumma quadratorum omnium, quæ fiunt ex numeris naturalibus, ſit ad ſummam totidem maximo æqualium in ratione ſubtripla, hoc eſt, ut 1 ad 3.

Similiter autem, quia ſumma indefinita cuborum, qui fiunt ex numeris naturalibus, eſt $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$; hæc erit tantùm $\frac{1}{4}m^4$, quum numerus m ponitur infinitus: unde etiam hujuſmodi profluit theorema, quod ſumma cuborum omnium, qui fiunt ex numeris naturali-

bus, ſit ad ſummam totidem maximo æqualium in ratione ſubquadrupla, hoc eſt, ut 1 ad 4. Atque ita quoque, ſi poteſtatum altiorum ſummæ indefinitæ tradita methodo determinentur; invenietur, ſummam ex quadrato-quadratis numerorum omnium naturalium eſſe ad ſummam totidem æqualium maximo, ut 1 ad 5; & ſummam ex quadrato-cubis, ut 1 ad 6; & ſummam ex cubo-cubis, ut 1 ad 7; atque ita deinceps.

Atque hinc plura alia theoremata colligere licet, proportionem inter numeros figuratos, & poteſtates numerorum naturalium exhibentia, quæ neſcio an adhuc ab Auctore aliquo ſint adnotata: nempe primò, quum ſumma ex omnibus numeris figuratis primi ordinis ſit ad ſummam totidem maximo æqualium, ut 1 ad 3, atque in hac eadem ratione ſit etiam ſumma quadratorum omnium ad ſummam totidem æqualium maximo; erit ſumma ex omnibus numeris figuratis primi ordinis ad maximum, ut ſumma ex omnibus quadratis ad quadratum ſimiliter maximum.

Secundò, quum ſumma ex omnibus numeris figuratis ſecundi ordinis ſit ad ſummam totidem maximo æqualium, ut

1 ad

I ad 4, atque in hac eadem ratione ſit etiam ſumma omnium cuborum ad ſummam totidem æqualium maximo; erit ſumma ex omnibus numeris figuratis ſecundi ordinis ad maximum, ut ſumma omnium cuborum ad cubum ſimiliter maximum.

Tertiò, quia ſumma ex omnibus numeris figuratis tertii ordinis eſt ad ſummam totidem maximo æqualium, ut I ad 5, atque in hac eadem ratione eſt etiam ſumma ex omnibus quadrato-quadratis ad ſummam totidem æqualium maximo; erit ſumma ex omnibus numeris figuratis tertii ordinis ad maximum, ut ſumma ex omnibus quadrato-quadratis ad quadrato-quadratum ſimiliter maximum.

Nec diſſimiliter determinari poterunt proportiones inter numeros figuratos ſuperioris ordinis, & poteſtates altiores. Sed proportiones iſtas licebit etiam paulò ſpecialiùs definire. Nam ultimus ex numeris figuratis primi ordinis, veluti aggregatum omnium numerorum naturalium, eſt $\frac{1}{2}$ *mm*, hoc eſt ſemiſſis maximi quadrati. Itaque ſumma omniũ

numerorũ figuratorum primi ordinis erit etiam ſemiſſis ſummæ omnium quadratorum.

Eadem ratione ultimus ex numeris figuratis ſecundi ordinis, veluti aggregatum ex iis, qui ſunt ordinis primi, eſt $\frac{1}{6}m^3$, hoc eſt ſextans maximi cubi. Quare ſumma omnium numerorum figuratorum ſecundi ordinis erit etiam ſextans ſummæ omnium cuborum. Atque hac ratione in infinitum progredi licebit.

Quæ omnia ex ipſis ſummis indefinitis eorum numerorum immediatè colligi poterunt. Nam ſumma indefinita omnium numerorũ figuratorum primi ordinis eſt $\frac{1}{6}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{3}m$; & ſumma indefinita omnium quadratorum inventa eſt $\frac{1}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{6}m$. Unde quia, quum nnmerus m ponitur infinitus, illa fit $\frac{1}{6}m^3$, hæc $\frac{1}{3}m^3$, liquet ſummas illas

eſſe

eſſe inter ſe, ut 1 ad 2.

Similiter ſumma indefinita omnium numerorum figuratorum ſecundi ordinis eſt $\frac{1}{24}m^4 + \frac{1}{4}m^3 + \frac{11}{24}m^2 + \frac{1}{4}m$, & ſumma indefinita omnium cuborum eſt $\frac{1}{4}m^4 + \frac{1}{2}m^3 + \frac{1}{4}m^2$. Quocirca quia poſito infinito numero m, prior ſumma evadit $\frac{1}{24}m^4$, poſterior verò mutatur in hanc aliam $\frac{1}{4}m^4$; palam eſt, ſummas illas eſſe inter ſe, ut 1 ad 6.

Sed nolo hic reticere pulcherrimam proprietatem, quæ deprehenditur in ſummis indefinitis tam poteſtatum, quàm numerorum figuratorum: nempe quod ſi propriis ſuis ſignis addantur in unum fractiones illæ, quæ in ſummis illis ſunt terminorum coefficientes, ſumma, quæ inde oritur, ſit ubique unitas. Atque hanc proprietatem cernere quoque licet in ſumma indefinita ipſorum numerorum naturalium, qui tam inter poteſtates, quàm inter numeros figuratos reponi

poſſunt. Nam quum ea ſit $\frac{1}{2}mm + \frac{1}{2}m$, perſpicuum eſt coefficientes terminorum ſimul additos unitatem adæquare.

VI.

Serierum infinitarum exempla alia afferuntur.

Vidimus ſuperiùs ſeries infinitas, quarum termini ſunt, vel numeri naturales, vel numeri figurati numerorum naturalium, in infinitum continuatas, numquam poſſe finitas ſummas exhibere. Interim ſi termini earum ſerierum dividantur ordine per terminos alterius ſeriei, cujus termini creſcendo geometricè progrediantur, vel quod eodem recidit, multiplicenrur per terminos novæ ſeriei, cujus termini progediantur geometricè decreſcendo; id quod orietur ex infinitorum illorum terminorum collectione, erit ſemper quantitas finita.

Dividantur itaque primò termini, conſtituentes ſeriem numerorum naturalium 1, 2, 3, 4 &c. per terminos progreſ-

greſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4 &c. ita, ut nova ſeries oriatur $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4}$ &c. Et jam, ſi quiſque teminus novæ hujus ſeriei reſolvatur in tot alios, quot numerator ejus continet unitates; conſtitui poterunt infinitæ aliæ ſeries, quæ ſingulæ progrediuntur geometricè decreſcendo, una ab $\frac{1}{a}$, altera ab $\frac{1}{a^2}$, tertia ab $\frac{1}{a^3}$, atque ita deinceps. Unde quia ſummæ iſtarum ſerierum, per ea, quæ oſtenſa ſunt articulo ſecundo, inveniuntur $\frac{1}{a-1}$, $\frac{1}{a^2-a}$, $\frac{1}{a^3-a^2}$ &c.; & ſeries iſtarum ſummarum eſt ad ſeriem $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}$ &c., ut a ad $a-1$; erit ſumma omnium infinitorum terminorũ novæ illius ſeriei quantitas a, diviſa per quadratum ipſius $a-1$.

Dividantur ſecũdò termini conſtituentes ſeriem numerorum figuratorum primi ordinis 1, 3, 6, 10 &c. per terminos ejuſ-

ejuſdem progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4 &c. ita, ut nova ſeries habeatur $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3} + \frac{10}{a^4}$ &c. Et rurſus, ſi quiſque terminus novæ hujus ſeriei reſolvatur in plures alios, quorum numeratores ſint numeri naturales, ex quibus componitur numerator illius; conſtitui poterunt infinitæ aliæ ſeries, quæ ſingulæ progrediantur geometricè decreſcendo, una ab $\frac{1}{a}$, ſecunda à $\frac{2}{a^2}$, tertia à $\frac{3}{a^3}$, atque ita deinceps. Quocirca quia ſummæ iſtarum ſerierum, per oſtenſa in articulo ſecundo, inveniuntur $\frac{1}{a-1}$, $\frac{2}{a^2-a}$, $\frac{3}{a^3-a^2}$ &c., & ſeries iſtarum ſummarum eſt ad ſeriem $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3}$ &c., ut a ad $a-1$; erit ſumma omnium infinitorum terminorum novæ illius ſeriei quantitas a^2 diviſa per cubum ipſius $a-1$.

Dividantur tertiò termini conſtituentes

tes ſeriem numerorum figuratorum ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c. per terminos ejuſdem adhuc progreſſionis geometricæ creſcentis a^1, a^2, a^3, a^4 &c. ita, ut nova ſeries conſtituatur $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{10}{a^3} + \frac{20}{a^4}$ &c. Et ſimiliter, ſi quiſque terminus novæ hujus ſeriei reſolvatur in plures alios, quorum numeratores ſint numeri figurati primi ordinis, ex quibus componitur numerator illius; conſtitui poterunt infinitæ aliæ ſeries, quæ ſingulæ progrediantur geometricè decreſcendo, una ab $\frac{1}{a}$, altera à $\frac{3}{a^2}$ tertia à $\frac{6}{a^3}$, atque ita deinceps. Unde quia ſummæ iſtarum ſeriérũ per ea, quæ oſtenſa ſunt in articulo ſecundo, inveniuntur $\frac{1}{a-1}$, $\frac{3}{a^2-a}$, $\frac{6}{a^3-a^2}$ &c., & ſeries iſtarum ſummarum eſt ad hanc aliam ſeriem $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3}$ &c., ut a ad $a-1$; erit ſumma omnium infininitorum termino-

rum novæ illius ſeriei quantitas a^3 diviſa per quadrato-quadratum ipſius $a-1$.

Eodem artificio invenire licet, ſummam finitam infinitorum terminorum cujuslibet alterius ſeriei, quæ oriatur, dividendo numeros figuratos ordinis ſuperioris per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4 &c. Nimirum reſolvendo unumquemque terminorum illius ſeriei in plures alios, quorū numeratores ſint numeri figurati ordinis præcedentis, ex quibus termini illius numerator componitur; & conſtituendo infinitas alias ſeries, quarum termini numeratores habeant conſtantes, & conſequenter geometricè progrediantur. Nam quum ſummæ harum ſerierum inveniantur per ea, quæ oſtenſa ſunt in articulo ſecundo, & ſeries harum ſummarum ſit ad ſeriem ortam ex numeris figuratis ordinis præcedentis, perpetuò ut a ad $a-1$; ex cognita ſumma iſtius ſeriei, facile erit, illius quoque ſummam invenire.

Sed ex iis, quæ hactenus oſtenſa ſunt, haud difficile erit, regulam credere, quæ ad omnes caſus ſe extendat. Nam ſi termini progreſſionis geometricæ decreſcentis $\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+$ &c., cujus ſumma eſt uni-

unitas diviſa per $a - 1$, afficiantur numeris naturalibus 1, 2, 3, 4 &c., ſumma erit quantitas a diviſa per quadratum ipſius $a - 1$; ſi verò aſſiciciantur numeris figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10 &c., ſumma erit quantitas a^2 diviſa per cubum ipſius $a - 1$; ſi porrò afficiantur numeris figuratis ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c., eadem ſumma erit quantitas a^3 diviſa per quadrato-quadratum ejuſdem $a - 1$; atque ita deinceps. Itaque ſi ipſi numeri naturales inter figuratorum ordines collocentur, ita ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum, regula generalis hæc erit. Elevetur quantitas a ad poteſtatem, quam deſignat exponens ordinis numerorũ, auctus unitate una; deinde dividatur eadem per eam poteſtatem ipſius $a - 1$, quam deſignat idem exponens duabus unitatibus auctus, & quotiens dabit ſummam, quam oportet invenire.

Hac ratione ſi termini progreſſionis geometricæ decreſcentis $\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4}$ &c. afficiantnr numeris naturalibus 1, 2, 3, 4, &c., ponaturque a æqualis binario;

ſe-

ſeries erit $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+$ &c., & ſumma infinitorum terminorum hujus ſeriei, erit ſimiliter 2. Quod ſi verò termini illi afficiantur numeris figuratis primi ordinis 1, 3, 6, 10, 15 &c.; maneatque adhuc a æqualis binario; ſeries erit $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{6}{8}+\frac{10}{16}+$ &c., eritque 4 ſumma infinitorum terminorum hujus ſeriei. Atque ita quoque erit 8 ſumma ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{4}{4}+\frac{10}{8}+\frac{20}{16}+$ &c., quæ oritur, ſi termini progreſſionis geometricæ decreſcentis afficiantur numeris figuratis ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c. Et 16 ſumma ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{5}{4}+\frac{15}{8}+\frac{35}{16}+$ &c., quæ habebitur, afficiendo terminos ejuſdem progreſſionis numeris figuratis tertii ordinis 1, 5, 15, 35 &c.

Præterea circa numeros iſtos figuratos illud etiam hoc loco notatu dignum exiſtimo, quod etſi ſumma ipſornm, cujuſcumque ſint ordinis, ſit infinita, attamen ſi in-

ſi invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro ſuo numeratore, iidem ſimul collecti ſummam exhibeant finitam. Eſt autem hujus rei hoc quidem theorema generale, quod in numeris figuratis inverſis ſumma omnium terminorum, qui primum excipiunt, eam unitatis partem adæquet, quam deſignat exponens ordinis numerorum, nempe unitatem ipſam in numeris figuratis primi ordinis, ſemiſſem unitatis in numeris figuratis ſecundi ordinis, unitatis trientem in numeris figuratis ordinis tertii, atque ita deinceps.

Invertantur itaque primò numeri figurati primi ordinis 1,3,6,10,15 &c. ;ita ut fiat ſeries $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$ &c. Oportet oſtendere ſummam omnium terminorum hujus ſeriei, excepto primo, unitatem adæquare. Fiat ſeries harmonica ex numeris naturalibus inverſis $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. Et jam, ſi ab ea eademmet multata primo termino ſubtrahatur, reſiduum erit ipſe terminus pri-

primus, qui unitatem adæquat. Sed ſi ſubtractio fiat ea lege, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius, prodit hæc alia ſeries $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+$ &c., cujus duplum eſt ſeries, quæ oritur ex inverſione numerorum figuratorum ordinis primi, quum ſit $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+$ &c. Itaque ſumma hujus ſeriei æqualis erit duplo unitatis; & propterea, dempto primo termino, qui ſupererunt unitatem ipſam adæquabunt.

Invertantur ſecundò numeri figurati ſecundi ordinis 1, 4, 10, 20 &c., ita ut ſeries fiat $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+$ &c. Oſtendendum eſt modò, terminos omnes hujus ſeriei, excepto primo, ſemiſſem unitatis adæquare. Fiat ſeries ex inverſione numerorum figuratorum ordinis primi $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+$ &c. Et ſiquidem ab illa eademmet multata primo termino ſubtrahatur, reſiduum erit ipſe terminus

pri-

primus, qui unitatem adæquat. Jam verò ſi ſubtractio ea lege inſtituatur, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius, naſcitur hæc alia ſeries $\frac{2}{3}+\frac{3}{18}+\frac{4}{60}+\frac{5}{150}+$ &c.; cujus termini ad terminos ſeriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+$ &c. rationem habent conſtantem, nimirum eandem, quam habet 2 ad 3. Itaque, quia valor illius ſeriei eſt unitas, erit valor alterius huius ſeriei ad unitatem, ut 3 ad 2: proindeque, dempto primo termino, qui remanebunt, ſemiſſem unitatis adæquabunt.

Invertantur tertiò numeri figurati tertii ordinis 1, 5, 15, 35 &c., ita ut ſeries conſtituatur $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+$ &c. Dico omnes terminos hujus ſeriei, excepto primo, trientem unitatis adæquare. Fiat ſeries ex inverſione numerorum figuratorum ſecūdi ordinis $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+$ &c. Et ſiquidem ab ea eademmet multata primo termino ſubducatur, id quod re-

manebit, erit ipſe terminus primus, qui unitatem adæquat. Sed ſi ſubtractio ea lege fiat, ut termini unius ordine ſubducantur ex terminis alterius, producitur hæc alia ſeries $\frac{3}{4}+\frac{6}{40}+\frac{10}{200}+\frac{15}{700}+$ &c., atque hujus termini ad terminos ſeriei $\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+$ &c. rationem habent conſtantem, nimirum eandem illam, quam habet 3 ad 4. Itaque, quia valor illius ſeriei eſt unitas, erit valor alterius hujus ſeriei ad unitatem, ut 3 ad 4: & proinde, dempto primo termino, qui ſupererunt, trientem unitatis adæquabunt.

Non diſſimiliter veritatem propoſiti theorematis oſtendemus, invertendo numeros figuratos ordinum ſuperiorũ. Sed ſi ipſi numeri naturales inter ordines numerorum figuratorum collocentur, ratione ſuperiùs tradita: ita nempe, ut exponens ordinis talium numerorum ſit zero, ſive nihilum, poterit idem theorema iis etiam numeris applicari. Invertantur enim numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, &c., & conſtituatur ex eorum inverſione ſeries

hac,

harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ &c. Dico, omnes terminos hujus ſeriei, qui primum excipiunt, ſimul collectos eam unitatis partem adæquare, quam deſignat zero, ſive nihilum, hoc eſt exponens ordinis numerorum naturalium: proindeque ſummam omnium illorum terminorum eſſe quantitatem infinitam; quum dividendo finitum per zero, ſive nihilum, infinitum oriatur.

Id autem, veluti prorſus memorabile, multipliciter oſtendemus. Et primò quidem in hunc modum. Fiat ſeries ex inverſione numerorum figuratorum primi ordinis $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} +$ &c. Et quoniã omnes termini, qui primum excipiunt, adæquant unnitatem, erit tota ſeries æqualis binario: proindeque dimidium ejuſdem ſeriei unitatẽ rurſus adæquabit. Capiatur autem dimidium illius ſeriei; & jam nova ſeries orietur $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} +$ &c.; quæ conſiderari poterit, veluti ge-

neratrix ſeriei harmonicæ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ &c. Nam quemadmodum tota illa ſeries dat primum terminum iſtius; ita ex eadẽ, multata primo termino, orietur iſtius terminus ſecundus; & ex eadem, multata duobus terminis, orietur iſtius terminus tertius; atque ita deinceps.

Ex quo patet, quod ſi ſeriei illius $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} +$ &c. quiſque terminus capiatur toties, quotus eſt locus, quem ipſe occupat in ſerie; ipſa ſeries harmonica debeat oriri. Id autem quum fit, oritur ſeries $\frac{1}{2} + \frac{2}{6} + \frac{3}{12} + \frac{4}{20} +$ &c., quæ, reductis terminis omnibus ad ſimpliciores ſuas expreſſiones, mutatur in hanc aliam $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} +$ &c., ſcilicet in ipſam ſeriem harmonicam, primo termino multatam. Itaque ſeries harmonica talis eſt, ut à ſe ipſa, multata primo termino, non differat: proindeque primus terminus, nempe unitas, evaneſcit re-

ſpe-

ſpectu totius ſeriei : quod non aliter fieri poſſe perſpicuum eſt, niſi ſumma infinitorum terminorum ſeriei harmonicæ ſit infinita.

Hoc idem oſtendemus etiam hac alia ratione. Conſtituantur ſeries infinitæ geometricæ, quæ incipientes à numeris imparibus inverſis, progrediantur in ratione dupla, quemadmodum factum hìc vides.

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\text{\&c.}$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+\frac{1}{48}+\frac{1}{96}+\text{\&c.}$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{40}+\frac{1}{80}+\frac{1}{160}+\text{\&c.}$$

$$\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}+\frac{1}{56}+\frac{1}{112}+\frac{1}{224}+\text{\&c.}$$

Et jam quia in iſtis ſeriebus reperiuntur omnes numeri naturales inverſi, eædem ſimul ſumptæ adæquabunt progreſſionem harmonicam. Jam verò ſummæ omnium illarum ſerierum, per oſtenſa in articulo ſecundo, conſtituunt hanc aliam

ſeriem $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}$ &c. Itaque hæc ſeries æqualis erit ſeriei harmonicæ; adeoque ſemiſſis ipſius $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ &c., quæ oritur ex inverſione numerorum imparium, erit ſemiſſis ejuſdem ſeriei harmonicæ; ac proinde æqualis ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}$ &c., ortæ ex numeris paribus inverſis. Id autem non aliter fieri poteſt, niſi ſumma utriuſque ſeriei ſtatuatur infinita; quum quiſque terminus illius unumquemq; iſtius terminum excedat. Eſt igitur infinita, tam ſeries, quæ oritur ex inverſione numerorum imparium, quam ſeries, quæ producitur ex numeris paribus inverſis; multoque magis ſeries harmonica, quæ illarum utramque comprehendit.

Sed aliam adhuc ejuſdem rei demonſtrationem afferamus: nimirum id omne eſt infinitum, ex quo, abſciſſa unitate, rurſus alia, atque alia in infinitum abſcindi poteſt. Itaque à principio ſeriei harmonicæ abſcindantur termini aliquot, quorum

rum ſumma adæquet, vel etiam ſuperet unitatem; & ex ſerie reliqua rurſus abſcindantur termini aliquot, quorum ſumma unitatem vel adæquet, vel excedat. Ergo ſi hæc terminorum abſciſſio in infinitum poteſt continuari, jam tota ſeries harmonica erit infinita. Quod ſi verò facta ſæpiùs ea terminorum abſciſſione, negas ulteriùs eam fieri poſſe, quia forte termini reliqui unitatem non excedant; repræſentet indefinitè a numerum illum, qui dividit unitatem in primo reliquorum terminorum.

Jam primi illius termini capiatur pars denominata ab $\frac{a+1}{a}$, hujuſque iterum pars conſimilis, atque ita deinceps. Conſtituetur ergo in hunc modum progreſſio geometrica decreſcens, cujus quiſque terminus minor erit unoquoque reliquorum ſeriei harmonicæ. Quare ſumma illius progreſſionis minor erit ſumma terminorum omnium, qui remanſerunt in progreſſione harmonica. Eſt autem ſumma infinitorum terminorum ejus progreſſionis, per oſtenſa in articulo ſecundo, æqualis unitati. Itaque erit unitate major ſumma reliquorum terminorũ progreſſio-

 nis

nis harmonicæ:proindeq; adhuc ex iis abſcindi poterũt termini aliquot,qui unitatem vel adæquent, vel proximè excedant. Et quoniam eadem eſt ſemper demonſtratio de reliquis terminis; conſequens eſt, ut ſeries harmonica talis ſit, ut ex ipſa abſciſſa unitate una, rurſus alia, atque alia in infinitum abſcindi poſſit; ac proinde, ut ſumma omnium infinitorum ejus terminorum ſit quantitas infinita.

Denique, ut aliud ſerierum infinitarum exemplum hìc proferamus, aſſumatur ſeries harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ &c., ex cujus terminis ſubtrahantur ordine termini ejuſdem ſeriei, duobus primis multatæ. Relinquetur itaque hæc alia ſeries $\frac{2}{3} + \frac{2}{8} + \frac{2}{15} + \frac{2}{24} + \frac{2}{35}$ &c., cujus omnes termini ſimul collecti adæquabunt priores duos progreſſionis harmonicæ. Unde ſemiſſis illius ſeriei $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35}$ &c., quæ oritur ex inverſione quadratorum, unitate minutorum

rum, invenietur $\frac{3}{4}$. Interim ſi ex hac alia ſerie terminos loco pari poſitos excerpas, erit ſumma ſeriei reliquæ $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}$ &c. æqualis $\frac{1}{4}$; quum ſit ſemiſſis illius ſeriei, quæ oritur, ſi ex terminis ſeriei genitæ ex inverſione numerorum imparium ſubtrahantur ordine termini ejuſdem ſeriei, primo tantùm multatæ. Sed ſi portò ex poſtrema illa ſerie excerpas adhuc terminos loco pari poſitos, tunc relinquetur hæc alia ſeries $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ &c., cujus ſumma finita, nullo numero exprimibilis, erit vera magnitudo circuli, poſito, quod diametri quadratum ſemiſſem unnitatis adæquet.

Cæterum hujuſmodi artificium inveniendi ſummas finitas ſerierum infinitarum, per ſubductionem unius ſeriei à ſe ipſa, nonniſi cum cautela debet adhiberi. Nam, exempli gratia, ſi à ſerie harmonica $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ &c. ſubtraha-

hatur eademmet, multata primo termino, orietur ſeries $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c. æqualis unitati, ſcilicet priori termino progreſſionis harmonicæ. Sed ſi à ſerie $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ &c. ſubtrahatur eadem ſeries, multata ſimiliter primo termino, relinquetur adhuc $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c., nec tamen dici poteſt, ſummam iſtius ſeriei æqualem eſſe illius primo termino, quum prior terminus illius non ſit unitas, ſed binarium.

Hujus rei ratio, ut clariùs intelligatur, notetur velim, quod quum ab aliqua ſerie eademmet, priori termino multata, ſubtrahitur, ſumma ſeriei reliquæ non ſit quidem primus terminus, ſed primus ultimo minutus. Nam quum ex primo ſubtrahatur ſecundus, ex ſecundo tertius, atque ita deinceps; ultimus, exhauſta infinitate, non modò à penultimo, verùm etiam à ſe ipſo ſubducendus erit, ut ex unoquoque termino unius ſeriei poſſit quiſque alterius ſubtrahi: proindeque quum

quum ſubtractione iſta termini omnes intermedii evaneſcant, ſupererit tantùm primus terminus ultimo minutus.

Jam quum ultimus ſeriei terminus evaneſcit in infinitum, ut contingit in ſerie harmonica, nihil obſtat, quominùs dicamus id, quod relinquitur, quotieſcumque ab aliqua ſerie eademmet priori termino multata ſubtrahitur, priorem terminum adæquare; quandoquidem prior terminus per ultimi ſubtractionem non minuitur. Sed quum ultimus ſeriei terminus non evaneſcit, tunc ad inveniendam ſummam ſeriei reliquæ, neceſſe eſt, ut ipſe à primo ſubducatur. Quocirca quia in ſerie $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$ &c. ultimus terminus unitatem adæquat, quum ſit quotiens, qui oritur dividendo infinitum per infinitum; ſumma ſeriei reliquæ erit prior terminus unitate multatus, nimirum illud idem, quod per ſeriem harmonicam invenitur.

CAP.

CAP. XII.

Poteſtatum formula generalis.

IN explicanda ſerierum infinitarum doctrina, ſummoperè à Recentioribus exculta, longè quidem morati ſumus, quàm noſtrum erat animus, & ſuſcepti operis ratio exigere videbatur. Interim, ut hujus doctrinæ uſum aliquem hìc oſtendamus, pateatque non omnino inutilia eſſe, quæ prætermitti potuiſſe, facile quiſque ſibi perſuadet; afferemus hoc capite formulam quandam generalem, qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope poſſit quæcumque quantitas, duabus partibus conſtans, ad datam quamcumque poteſtatem elevari.

Ex iis namque, quæ ſuperiùs de formatione poteſtatum dicta ſunt, perſpicuum eſt non unâ eademque regulâ quantitatem, duabus conſtantem partibus, poſſe ad poteſtatem omnem attolli. Alia ſiquidem obſervanda eſt regula, quum elevari debet ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; alia quum cubum, ſive tertiam poteſtatem; & alia, quum ad poteſtatem aliam ſuperiorem evehi debet. Itaq; quum

pro

pro ſingulis diverſis poteſtatibus totidem diverſæ regulæ requirantur; erit equidem compendii numquam ſatis deprædicandi, ſi quæ poſſit formula generalis excogitari, quæ ad omnem quamcumque poteſtatem ſe extendat.

Sed priùſquam formulam iſtam generalem afferamus, indicandum eſt breviter, qua ratione in quantitatibus ſimplicibus poteſtates generaliter, ac indefinitè poſſint deſignari. Id itaque fit, ponendo, velut exponentes poteſtatum, litteras alias alphabeti. Quum enim litteræ iſtæ nullum valorem habeant, poterunt eæ quemcumque numerum repræſentare; atque ita velut exponentes quarumcumque poteſtatum conſiderari.

Hac ratione poteſtas indefinita quantitatis ſimplicis a, quæ ſcilicet omnem quamcumque poteſtatem ipſius a poſſit repræſentare, erit a^m; & ſimiliter poteſtas indefinita quantitatis ſimplicis c erit c^m. Unde ſi ponatur deinde m æqualis binario; a^m idem erit, ac a^2; & c^m idem, ac c^2. Quod ſi verò ponatur m æqualis ternario; a^m idem valebit, ac a^3; & c^m idem ac c^3.

Et quoniam littera m omnem quemcumque numerum, ſive poſitivum, ſive ne-

ſeriem $\frac{2}{1}+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+$ &c. Itaque hæc ſeries æqualis erit ſeriei harmonicæ; adeoque ſemiſſis ipſius $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+$ &c., quæ oritur ex inverſione numerorum imparium, erit ſemiſſis ejuſdem ſeriei harmonicæ; ac proinde æqualis ſeriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+$ &c., ortæ ex numeris paribus inverſis. Id autem non aliter fieri poteſt, niſi ſumma utriuſque ſeriei ſtatuatur infinita; quum quiſque terminus illius unumquemq; iſtius terminum excedat. Eſt igitur infinita, tam ſeries, quæ oritur ex inverſione numerorum imparium, quam ſeries, quæ producitur ex numeris paribus inverſis; multoque magis ſeries harmonica, quæ illarum utramque comprehendit.

Sed aliam adhuc ejuſdem rei demonſtrationem afferamus: nimirum id omne eſt infinitum, ex quo, abſciſſa unitate, rurſus alia, atque alia in infinitum abſcindi poteſt. Itaque à principio ſeriei harmonicæ abſcindantur termini aliquot, quorum

rum ſumma adæquet, vel etiam ſuperet unitatem; & ex ſerie reliqua rurſus abſcindantur termini aliquot, quorum ſumma unitatem vel adæquet, vel excedat. Ergo ſi hæc terminorum abſciſſio in infinitum poteſt continuari, jam tota ſeries harmonica erit infinita. Quod ſi verò facta ſæpiùs ea terminorum abſciſſione, negas ulteriùs eam fieri poſſe, quia forte termini reliqui unitatem non excedant; repræſentet indefinitè a numerum illum, qui dividit unitatem in primo reliquorum terminorum.

Jam primi illius termini capiatur pars denominata ab $\frac{a+1}{a}$, hujuſque iterum pars conſimilis, atque ità deinceps. Conſtituetur ergo in hunc modum progreſſio geometrica decreſcens, cujus quiſque terminus minor erit unoquoque reliquorum ſeriei harmonicæ. Quare ſumma illius progreſſionis minor erit ſumma terminorum omnium, qui remanſerunt in progreſſione harmonica. Eſt autem ſumma infinitorum terminorum ejus progreſſionis, per oſtenſa in articulo ſecundo, æqualis unitati. Itaque erit unitate major ſumma reliquorum terminorũ progreſſio-

nis harmonicæ:proindeq; adhuc ex iis abſcindi poterũt termini aliquot,qui unitatem vel adæquent, vel proximè excedant. Et quoniam eadem eſt ſemper demonſtratio de reliquis terminis; conſequens eſt, ut ſeries harmonica talis ſit, ut ex ipſa abſciſſa unitate una, rurſus alia, atque alia in infinitum abſcindi poſſit; ac proinde, ut ſumma omnium infinitorum ejus terminorum ſit quantitas infinita.

Denique, ut aliud ſerierum infinitarum exemplum hìc proferamus, aſſumatur ſeries harmonica $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ &c., ex cujus terminis ſubtrahantur ordine termini ejuſdem ſeriei, duobus primis multatæ. Relinquetur itaque hæc alia ſeries $\frac{2}{3}+\frac{2}{8}+\frac{2}{15}+\frac{2}{24}+\frac{2}{35}+$ &c., cujus omnes termini ſimul collecti adæquabunt priores duos progreſſionis harmonicæ. Unde ſemiſſis illius ſeriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}+$ &c., quæ oritur ex inverſione quadratorum, unitate minutorum

rum, invenietur $\frac{3}{4}$. Interim ſi ex hac alia ſerie terminos loco pari poſitos excerpas, erit ſumma ſeriei reliquæ $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+$ &c. æqualis $\frac{1}{4}$; quum ſit ſemiſſis illius ſeriei, quæ oritur, ſi ex terminis ſeriei genitæ ex inverſione numerorum imparium ſubtrahantur ordine termini ejuſdem ſeriei, primo tantùm multatæ. Sed ſi porrò ex poſtrema illa ſerie excerpas adhuc terminos loco pari poſitos, tunc relinquetur hæc alia ſeries $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+$ &c., cujus ſumma finita, nullo numero exprimibilis, erit vera magnitudo circuli, poſito, quod diametri quadratum ſemiſſem unnitatis adæquet.

Cæterum hujuſmodi artificium inveniendi ſummas finitas ſerierum infinitarum, per ſubductionem unius ſeriei à ſe ipſa, nonniſi cum cautela debet adhiberi. Nam, exempli gratia, ſi à ſerie harmonica $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+$ &c. ſubtraha-

hatur eademmet, multata primo termino, orietur ſeries $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c. æqualis unitati, ſcilicet priori termino progreſſionis harmonicæ. Sed ſi à ſerie $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4}$ &c. ſubtrahatur eadem ſeries, multata ſimiliter primo termino, relinquetur adhuc $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$ &c., nec tamen dici poteſt, ſummam iſtius ſeriei æqualem eſſe illius primo termino, quum prior terminus illius non ſit unitas, ſed binarium.

Hujus rei ratio, ut clariùs intelligatur, notetur velim, quod quum ab aliqua ſerie eademmet, priori termino multata, ſubtrahitur, ſumma ſeriei reliquæ non ſit quidem primus terminus, ſed primus ultimo minutus. Nam quum ex primo ſubtrahatur ſecundus, ex ſecundo tertius, atque ita deinceps; ultimus, exhauſta infinitate, non modò à penultimo, verùm etiam à ſe ipſo ſubducendus erit, ut ex unoquoque termino unius ſeriei poſſit quiſque alterius ſubtrahi: proindeque quum

quum ſubtractione iſta termini omnes intermedii evaneſcant, ſupererit tantùm primus terminus ultimo minutus.

Jam quum ultimus ſeriei terminus evaneſcit in infinitum, ut contingit in ſerie harmonica, nihil obſtat, quominùs dicamus id, quod relinquitur, quotieſcumque ab aliqua ſerie eademmet priori termino multata ſubtrahitur, priorem terminum adæquare; quandoquidem prior terminus per ultimi ſubtractionem non minuitur. Sed quum ultimus ſeriei terminus non evaneſcit, tunc ad inveniendam ſummam ſeriei reliquæ, neceſſe eſt, ut ipſe à primo ſubducatur. Quocirca quia in ſerie $\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}$ &c. ultimus terminus unitatem adæquat, quum ſit quotiens, qui oritur dividendo infinitum per infinitum; ſumma ſeriei reliquæ erit prior terminus unitate multatus, nimirum illud idem, quod per ſeriem harmonicam invenitur.

CAP.

CAP. XII.

Poteſtatum formula generalis.

IN explicanda ſerierum infinitarum doctrina, ſummoperè à Recentioribus exculta, longè quidem morati ſumus, quàm noſtrum erat animus, & ſuſcepti operis ratio exigere videbatur. Interim, ut hujus doctrinæ uſum aliquem hìc oſtendamus, pateatque non omnino inutilia eſſe, quæ prætermitti potuiſſe, facile quiſque ſibi perſuadet; afferemus hoc capite formulam quandam generalem, qua mediante vel ſolius ſubſtitutionis ope poſſit quæcumque quantitas, duabus partibus conſtans, ad datam quamcumque poteſtatem elevari.

Ex iis namque, quæ ſuperiùs de formatione poteſtatum dicta ſunt, perſpicuum eſt non unâ eademque regulâ quantitatem, duabus conſtantem partibus, poſſe ad poteſtatem omnem attolli. Alia ſiquidem obſervanda eſt regula, quum elevari debet ad quadratum, ſive ſecundam poteſtatem; alia quum cubum, ſive tertiam poteſtatem; & alia, quum ad poteſtatem aliam ſuperiorem evehi debet. Itaq; quum pro

pro ſingulis diverſis poteſtatibus totidem diverſæ regulæ requirantur; erit equidem compendii numquam ſatis deprædicandi, ſi quæ poſſit formula generalis excogitari, quæ ad omnem quamcumque poteſtatem ſe extendat.

Sed priùſquam formulam iſtam generalem afferamus, indicandum eſt breviter, qua ratione in quantitatibus ſimplicibus poteſtates generaliter, ac indefinitè poſſint deſignari. Id itaque fit, ponendo, velut exponentes poteſtatum, litteras alias alphabeti. Quum enim litteræ iſtæ nullum valorem habeant, poterunt eæ quemcumque numerum repræſentare; atque ita velut exponentes quarumcumque poteſtatum conſiderari.

Hac ratione poteſtas indefinita quantitatis ſimplicis a, quæ ſcilicet omnem quamcumque poteſtatem ipſius a poſſit repræſentare, erit a^m; & ſimiliter poteſtas indefinita quantitatis ſimplicis c erit c^m. Unde ſi ponatur deinde m æqualis binario; a^m idem erit, ac a^2; & c^m idem, ac c^2. Quod ſi verò ponatur m æqualis ternario; a^m idem valebit, ac a^3; & c^m idem ac c^3.

Et quoniam littera m omnem quemcumque numerum, ſive poſitivum, ſive

ne-

negativum; ſive integrum, ſive fractum poteſt exhibere, perſpicuum eſt a^m eſſe poteſtatem adeò generalem, ac indefinitam ipſius a, ut poſſit non modò omnes poteſtates perfectas poſitivas, verùm etiam omnes alias, ſuperiùs à nobis conſideratas, repræsẽtare. Qua ratione quemadmodum ſi ponatur m æqualis binario, erit a^m idem ac quadratum ipſius a; ita ſi ponatur m ſemiſſem unitatis exhibere, deſignabit a^m radicem quadratam ipſius a.

Liquet igitur, quo pacto in quantitatibus ſimplicibus poteſtates generaliter, ac indefinitè poſſint deſignari. Videamus itaque modò, qua ratione hoc idem fieri poſſit in quantitatibus compoſitis, hoc eſt in iis, quæ duabus partibus conſtant. Et quoniam poteſtates quantitatum compoſitarum plures terminos involvũt, quorum ſinguli ſuos habent coefficientes; duo nobis erunt oſtendenda, nempe primum, qua ratione deſignari debeant generaliter ac indefinitè termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua compoſita; alterum, quo pacto deſignandi ſint itidem generaliter, ac indefinitè coefficientes eorum terminorum.

Ter-

I.

Terminorum cujuſcumque poteſtatis generalis expreſſio.

Tota difficultas, quæ in formatione poteſtatum occurrit, conſiſtit potiſſimùm in eo, ut inveniantur coefficientes, quibus afficiendi ſunt termini poteſtatum. Nam quantum ad ipſos terminos, habentur ii nullo negotio, ſi conſtitutis duabus progreſſionibus geometricis, quarum exponentes ſint ipſæ partes quantitatis, ad poteſtatem elevandæ, & quarum una à quæſita ſui exponentis poteſtate deſcendat uſque ad unitatem, altera viciſſim ab unitate aſcendat uſq; ad poteſtatem quæſitam ſui exponentis; multiplicentur termini unius progreſſionis per terminos alterius.

Ut ſi velim, exempli gratia, invenire terminos cubi ex quantitate compoſita $a + b$, conſtituo duas progreſſiones geometricas; quarum una, habens pro ſuo exponente partem a, deſcendat à cubo ipſius a uſque ad unitatem; altera, habens pro exponente partem b, aſcendat viciſſim ab unitate uſque ad cubum ipſius b. Nam

Nam quum iſtarum progreſſionum una ſit a^3, a^2, a, 1; altera 1, b, b^2, b^3: multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, fient termini cubi quæſiti a^3, a^2b, ab^2, b^3.

Similiter ſi inveniendi ſint termini quadrato-cubi, ſive quintæ poteſtatis ex quantitate compoſita $a + b$, formentur duæ progreſſiones geometricæ; quarum una habeat pro ſuo exponente partem a, & à quadrato-cubo ipſius a deſcendat uſque ad unitatem; altera habeat pro ſuo exponente partem b, & viciſſim ab unitate aſcendat uſque ad quadrato-cubum ipſius b. Quum enim iſtarum progreſſionum una ſit a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1; altera, 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5: multiplicatis terminis unius progreſſionis ordine per terminos alterius, fient termini quadrato-cubi quæſiti a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5.

Eadem ratione ſi oporteat invenire terminos ſeptimæ poteſtatis ex quantitate compſita $a + b$, conſtituendæ ſunt duæ progreſſiones geometricæ; quarum una, habens pro ſuo exponente partem a, deſcendat à ſeptima poteſtate ipſius a uſque ad unitatem; altera, habens pro ſuo exponente partem b, aſcendat viciſſim ab unitate

tate uſque ad ſeptimam poteſtatem ipſius *b*. Etenim, quum ipſarum progreſſionum una ſit a^7, a^6, a^5, a^4, a^3, a^2, a, 1; altera 1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, b^6, b^7: multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, fient termini quæſitæ poteſtatis a^7, a^6b, , a^5b^2, a^4b^3, a^3b^4, a^2b^5, ab^6, b^7.

Jam ex hac methodo determinandi terminos cujuſcumque poteſtatis ex radice, duabus partibus conſtante, colligere licet primo, in unaquaque poteſtate terminorum numerum deſignari ab exponente ipſius poteſtatis, unitate aucto. Nam habentur termini cujuſque poteſtatis, conſtituendo duas progreſſiones geometricas, quarum una à quæſita poteſtate unius partis deſcendat per omnes poteſtates inferiores uſque ad unitatem; altera viciſſim ab unitate aſcendat per eaſdem poteſtates inferiores alterius partis uſque ad poteſtatem quæſitam, & multiplicando terminos unius progreſſionis ordine per terminos alterius. Itaque, quia numerus terminorum in utraque progreſſione deſignatur ab exponente poteſtatis, unitate aucto; deſignabit idem exponens, unitate auctus, numerum terminorum quæſitæ poteſtatis.

Colligere licet ſecundò, in terminis extremis cujuſque poteſtatis ex radice, duabus partibus conſtante, contineri tantùm poteſtates ipſarum partium ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur; in terminis autem intermediis contineri poteſtates omnes inferiores earundem partium, per ſe mutuò inverſo ordine multiplicatas. Nam progreſſionum geometricarum, quæ conſtitui debent, una à quæſita unius partis poteſtate deſcendit uſque ad unitatem; altera viciſſim ab unitate aſcendit uſque ad poteſtatem quæſitam alterius partis. Quocirca in terminis extremis reperientur ſolæ poteſtates partium ejuſdem ordinis cum illa, de qua agitur; in terminis autem intermediis reperientur earundem partium poteſtates omnes inferiores, inverſo ordine per ſe mutuò multiplicatæ.

Colligere licet tertiò, terminos cujuſcumq; poteſtatis ex radice aliqua, duabus partibus conſtante, progreſſionem geometricam conſtituere. Notum eſt enim, quod ſi termini unius progreſſionis geometricæ multiplicentur per terminos alterius progreſſionis geometricæ, producta progreſſionem aliam ſimiliter geometricam conſtituant. Itaque, quia ad inveniendos termi-

minos cujuſcumque poteſtatis ex radice, cujus duæ ſunt partes, multiplicandi ſunt termini unius progreſſionis geometricæ per terminos alterius; conſequens eſt, ut termini illius poteſtatis progreſſionem aliam pariter geometricam componant.

Sed ex eadem methodo colligere quoque licet, qua ratione termini cujuſcumque poteſtatis ex radice, cujus duæ ſunt partes, poſſint generaliter, ac indefinitè deſignari. Oporteat itaque invenire terminos poteſtatis ex quantitate compoſita $a + b$, cujus exponens generaliter, ac indefinitè ſit numerus m. Conſtituantur duæ progreſſiones geometricæ, quarum una ab ea poteſtate partis a, quam deſignat numerus m, deſcendat per poteſtates omnes inferiores uſque ad unitatem; altera viciſſim ab unitate aſcendat per poteſtates omnes inferiores alterius partis b uſq; ad eā ipſius poteſtatem, quam oſtendit idem numerus m. Itaque harum progreſſionum una erit a^m, a^{m-1}, a^{m-2}, a^{m-3}, a^{m-4} &c., altera 1, b, b^2, b^3, b^4, &c. Unde multiplicatis ordine terminis unius progreſſionis per terminos alterius, fient termini quæſiti a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$, $a^{m-4}b^4$ &c.

Et quamquam termini iſti videantur

eſſe numero infiniti, attamen quum exponens generalis m determinatur, fit eorum multitudo finita; quandoquidem pervenitur tandem ad aliquem terminū, in quo exponens poteſtatis, ad quam aſcendit pars prior radicis a, eſt zero, ſive nihilum, poſt quem non ulterius progrediendū, quia poteſtas illa tantundē valet, ac unitas. Ita ſi ponamus, exponentem generalem m binarium repræſentare, prior terrminus erit a^2, ſecundus ab, tertius autem b^2; nam a^{m-2}, quum idem ſit, ac a^0, non differt ab unitate: proindeque termini quæſiti erunt a^2, ab, b^2. Similiter ſi ponatur m æqualis ternario, prior terminus erit a^3, ſecundus a^2b, tertius ab^2, quartus autem b^3; quandoquidem a^{m-3}, veluti a^0, idem erit, ac unitas: & propterea quæſiti termini erunt a^3, a^2b, ab^2, b^3.

Cæterùm, quod quantitas elevata ad poteſtatem, cujus exponens ſit zero, ſive nihilum, tantundem valeat, ac unitas; id equidem colligitur ex iis, quæ diximus capite ſexto, quum generalem poteſtatum ideam exhibuimus. Demonſtravimus etenim, quod ſi ipſa unitas inter poteſtates reponatur, utpote quæ cum ipſis poteſtatibus adhuc progreſſionem geometricam con-

conſtituit, exponens ejus debeat eſſe zero, ſive nihilum. Ex quo ſequitur viciſſim, ut cujuſcumque quantitatis poteſtas illa, quæ habet zero, ſive nihilum pro ſuo exponente, ab unitate differre non debeat; ac proinde, ut tantundem valeat, ac ipſa unitas.

II.

Coefficientium eorundem terminorum generalis expreſſio.

Vidimus, quo pacto termini cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua cujus duæ ſunt partes, poſſint generaliter, ac indefinitè deſignari; videamus modò, qua ratione coefficientes eorundem terminorum eadem generalitate exprimi poſſint. Hunc in finem exhibendi ſunt priùs in tabula aliqua ordine coefficientes iſti, prout ad terminos cujuſcumque poteſtatis referuntur, ut ſcilicet cognoſci poſſit, num aliqua iis inſit proprietas generalis, qua mediante generaliter etiam exprimi queant.

Itaque in columnis lateralibus ſequentis tabulæ collocentur ordine coefficientes terminorum cujuſque poteſtatis: nimirum in prima coefficientes termino-

rum poteſtatis primæ 1, 1; in ſecunda coefficientes terminorum poteſtatis ſecundæ 1, 2, 1; in tertia coefficientes terminorum poteſtatis tertiæ 1, 3, 3, 1; atque ita deinceps. Et quoniam in prima columnarum verticalium erit coefficiens primi termini cujuſque poteſtatis, in ſecunda coefficiens termini ſecundi, in tertia coefficiens termini tertii, atque ita in infinitum; liquet tabulæ hujus talem eſſe conſtitutionem, ut numeri, in una, eademque columna laterali exiſtentes, deſignent ordine coefficientes terminorum illius poteſtatis, quam oſtendit locus ejuſdem columnæ; numeri verò, exiſtentes in una, eademque columna verticali, deſignent ordine coefficientes, qui in poteſtatibus omnibus ad eum terminum referuntur, quem ejuſdem columnæ locus repræſentat. Unde eò res redit, ut inquiramus, an termini cujuſque columnæ verticalis poſſint generaliter, ac indefinitè deſignari.

Jam

TABULA

Coefficientium, qui referuntur ad terminos cujuſcumque poteſtatis.

1	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0
1	3	3	1	0	0	0	0
1	4	6	4	1	0	0	0
1	5	10	10	5	1	0	0
1	6	15	20	25	6	1	0
1	7	21	35	35	21	7	1

Jam in tabula iſta termini prioris columnæ verticalis conſtituunt ſeriem unitatum, termini ſecundæ conſtituunt ſeriem numerorum naturalium, termini verò aliarum columnarum tales ſunt, ut quilibet ex iis in unaquaque columna æquetur ſummæ omnium ſuperiorum præcedentis columnæ verticalis. Unde

 quemad

quemadmodum ope hujus proprietatis tabula ipſa nullo negotio poteſt in infinitum continuari; ita exinde colligi poteſt, quod ad inveniendum optatum quemcumque terminum in quacumque aliarum columnarum verticalium, ſatis ſit in unum addere omnes terminos ſuperiores, qui ſunt in præcedenti columna verticali.

Sed exinde colligi quoque poteſt, numeros, qui ſunt in aliis columnis verticalibus ejuſdem tabulæ, eſſe numeros figuratos, quos ſuperiori capite conſideravimus. In iis namque columnis numerus quiſque oritur ex collectione numerorum ſuperiorum præcedentis columnæ verticalis. Itaque, quia in ſecunda columna eſt ſeries numerorum naturalium, qui ex continua unitatum collectione oriuntur; erit in tertia ſeries numerorum figuratorum primi ordinis, in quarta ſeries numerorum figuratorum ſecundi ordinis, in quinta ſeries numerorum figuratorum ordinis tertii, atque ita deinceps.

Præterea, ſi loca vacua cujuſque columnæ verticalis cyphris repleantur, hanc aliam in tabula illa licebit cernere proprietatem, quod prima, & ſecunda co-

lumnarum verticalium nullam habeant cyphram ab initio, ſed unam tertia, duas quarta, tres quinta, atque ita deinceps. Quæ ſanè proprietas exinde dependet, quod numerus terminorum cujuſque poteſtatis ab exponente unitate aucto deſignetur. Quocirca, ſi in iis columnis ſumantur termini æquè multi, quorum multitudinem deſignet littera m; multitudo terminorum ſignificativorum erit m tam in prima, quàm in ſecunda columna, ſed $m - 1$ in tertia, $m - 2$ in quarta, $m - 3$ in quinta, atque ita in infinitum.

Atque hinc modò facilè erit, terminum quemcumque cujuſque columnæ verticalis generaliter, ac indefinitè deſignare. Nam quantum ad primam columnam, quia in ea habetur ſeries unitatum, quæ nullam habent cyphram ab initio, deſignabit ipſa unitas terminum quemcumque illius columnæ. Quantum verò ad ſecundam, quia in ea exiſtit ſeries numerorum naturalium, qui ſimiliter nullam cyphram ab initio habent, ſi proponatur inveniendus terminus, qui occupet locum deſignatum à littera m, deſignabit eadem littera m terminum, quem oportet invenire.

Quantum autem ad alias columnas, ne-

neq; etiam difficile erit in iis, terminum quemcumque generaliter, ac indefinitè deſignare. Nam, quum in columnis illis habeantur ordine ſeries numerorum figuratorum, ſatis erit in unum colligere tot eorum numerorum, ex quorum collectione ii generari intelliguntur, quotus eſt locus, quem in columna occupat terminus inveniendus, excluſis cyphris initialibus.

Hac ratione, quia in tertia columna exiſtunt numeri figurati primi ordinis, qui unam cyphram ab initio habent, ſi in ea oporteat invenire terminum, qui occupet locum, deſignatum à littera m, ſatis erit in unum addere tot numeros naturales, quot deſignat $m - 1$, hoc eſt locus, quem occupat terminus inveniendus, excluſa cyphra initiali.

Similiter, quia in quarta columna habentur numeri figurati ſecundi ordinis, quibus duæ præfixæ ſunt cyphræ, ſi in ea proponatur inveniendus terminus, cujus locum deſignet littera m, ſatis erit in unum colligere tot numeros figuratos primi ordinis, quot deſignat $m - 2$, hoc eſt locus, quem occupat inveniendus terminus, excluſis duabus cyphris initialibus.

Ea-

Eadem ratione, quia in quinta columna reperiuntur numeri figurati ordinis tertii, qui tres cyphras ab initio habent, ſi in ea terminum oporteat invenire, cujus locum referat littera m, addendi erunt in unam ſummam tot numeri figurati ſecundi ordinis, quot deſignat $m - 3$, hoc eſt locus, quem occupat inveniendus terminus, excluſis tribus cyphris initialibus.

Atque hac ratione oſtendetur etiam, colligendos eſſe in unum tot numeros figuratos ordinis tertii, quot deſignat $m - 4$, ut inveniatur in ſexta columna terminus, qui locum occupet, deſignatum à littera m; & eſſe in unum addendos tot numeros figuratos ordinis quarti, quot deſignat $m - 5$ ad inveniendum in quinta columna terminum, cujus locum oſtendat eadem littera m; ſicque in infinitum progredi licebit.

Jam regula generalis ad inveniendam ſummam quotcumque numerorum figuratorum hæc ſuperiùs prodiit: fiant duæ progreſſiones arithmeticæ, ambæ aſcendentes per unitatis incrementum, una quidem à multitudine numerorum, in unam ſummam colligendorum, altera ab unitate, & utraque tot terminorum, quot deſignat exponens ordinis numero-

rum

rum, duabus unitatibus auctus; multiplicentur deinde inter ſe mutuò, tam termini prioris progreſſionis, quàm termini alterius, & diviſo producto ex primis per productum ex ſecundis, erit quotiens numerorum ſumma quæſita.

Et quoniam numerorum naturalium ea eſt proprietas, ut ſi multitudo eorum, quos oportet in unam ſummam colligere, multiplicetur per ſe ipſam, unitate auctam, producti ſemiſſis ſit ſumma quæſita; perſpicuum eſt, regulam illam locum ſibi etiam vindicare in numeris naturalibus: ſcilicet ſi ipſi numeri naturales ea ratione inter numeros figuratos referantur, ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum.

Itaque, quia ad inveniendum terminum, qui in tertia columna verticali locum occupet, deſignatum à littera *m*, colligendi ſunt in unum tot numeri naturales, quot deſignat $m - 1$; progreſſionum conſtituendarum una erit $m - 1$, m; altera 1, 2: proindeque terminus quæſitus erit $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}$, ponendo rurſus, quòd puncta, quantitatibus interjecta, multiplicationem earum quantitatum deſignent.

Si-

Similiter, quia ad inveniendum terminum, qui in quarta columna verticali occupet locum deſignatum ab eadem littera m, colligere oportet in unum tot numeros figuratos primi ordinis, quot oſtendit $m - 2$; ex progreſſionibus conſtituendis una erit $m - 2, m - 1, m$; altera $1, 2, 3$: & propterea terminus, quem oportet invenire, erit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$.

Eadem ratione, quia ad inveniendum in quinta columna verticali terminum, cujus locum oſtendat littera m, addendi ſunt in unam ſummã tot numeri figurati ſecundi ordinis, quot deſignat $m - 3$; progreſſionum conſtituendarum una erit $m - 3, m - 2, m - 1, m$; altera $1, 2, 3, 4$: proindeque terminus quæſitus erit $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$.

Non diſſimiliter oſtendetur, terminum, qui in unaquaque columna verticali locum occupet deſignatum à littera m, eſſe $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}$ in ſexta columna verticali; eſſe verò in

$$\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2 \cdot m - 3 \cdot m - 4 \cdot m - 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

in ſeptima ; atque ita deinceps . Unde modò facile erit, coefficientes terminorum cujuſque poteſtatis generaliter, ac indefinitè deſignare.

Quum enim in prima columnarum verticalium ſit coefficiens primi termini cujuſque poteſtatis, in ſecunda coefficiens termini ſecundi, in tertia coefficiens termini tertii, atque ita deinceps; illæ eædem quantitates, quæ numeros earum columnarum generaliter, ac indefinitè deſignãt, deſignabunt etiam in unaquaque poteſtate generaliter, ac indefinitè coefficientes ſuorum terminorum. Qua ratione unitas erit coefficiẽs generalis termini primi; m, vel etiam $\frac{m}{1}$ coefficiens generalis termini ſecundi; $\frac{m \cdot m - 1}{1 \cdot 2}$ coefficiens generalis termini tertii; $\frac{m \cdot m - 1 \cdot m - 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ coefficiens generalis termini quarti ; atque ita in infinitum.

Quemadmodum autem multitudo terminorum cujuſque poteſtatis evadit finita,

ta, ubi exponens generalis m determinatur; ita quoque determinato eodem exponente, multitudo eorum coefficientium tanta prodit, quotus eſt numerus terminorum illius poteſtatis, ad quam exponens ille refertur. Ita ſi ponamus exponentem generalem m binarium repræſentare, non plures, quàm tres coefficientes habebuntur, quorum primus erit unitas, ſecundus binarius, & tertius iterum unitas. Pariterque ſi m ternarium repræſentet, quatuor tantùm coefficientes invenientur, quorum primus erit unitas, ſecundus ternarius, tertius ternarius item, & quartus itidem unitas.

Hujus rei ratio exinde eſt repetenda, quod omnis quantitas, quæ per zero, ſive nihilum multiplicatur, evaneſcat, & fiat etiam æqualis zero, ſive nihilo. Hac enim ratione, quum exponens generalis m ponitur æqualis binario, omnes illi coefficientes, in quibus reperitur $m-2$ evaneſcere debent; quia ſcilicet in eorum conſtitutione zero, ſive nihilum per viam multiplicationis ingreditur. Et ſimiliter quum ponitur m æqualis ternario, evaneſcere debent coefficientes illi omnes, in quibus occurrit $m-3$; quia nempe quantitates, coefficientes illos deſignan-

ſignantes, per zero, ſive nihilum multiplicatæ reperiuntur. Unde facilè oſtendi poteſt, quod determinato exponente generali m, multitudo coefficientium tanta prodeat, quotus eſt numerus terminorum illius poteſtatis, ad quam exponens ille refertur.

III.

Generalis poteſtatum formula exhibetur.

EXpreſſis generaliter, ac indefinitè tum terminis cujuſcumque poteſtatis ex radice aliqua, cujus duæ ſunt partes, cùm coefficientibus, qui ad terminos illos referuntur; haud difficile modò erit, ipſam poteſtatũ formulã generalem exhibere. Afficiantur etenim ordine ſinguli termini propriis ſuis coefficientibus; & ſiquidem illi iis ſignis inter ſe mutuò conjungantur, quæ multiplicationis exigunt regulæ, jam quæſita formula orietur.

Sint igitur a, & b partes radicis, ad eam poteſtatem elevandæ, cujus exponens generaliter, ac indefinitè ſit m. Erit itaque ex ſuperiùs oſtenſis a^m primus terminus poteſtatis, $a^{m-1}b$ terminus ſecundus, $a^{m-2}b^2$ terminus tertius, $a^{m-3}b^3$ terminus quartus, atque ita deinceps.

Et

Et quoniam coefficiens primi termini eſt unitas, & $\frac{m}{1}$ coefficiẽs ſecũdi termini, $\frac{m.m-1}{1.2}$ coefficiens termini tertii, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}$ coefficiens termini quarti, atque ita in infinitum; erit conſtruendæ formulæ generalis a^m pars prima, $\frac{m}{1}a^{m-1}b$ pars ſecunda, $\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2$ pars tertia, $\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3$ pars quarta, atque ita deinceps.

Quæ verò ſint ſigna, quibus juxta regulas multiplicationis partes illæ ſunt ſimul conjungendæ, facile quidem erit definire, ſi recordemur, poteſtates pares quantitatum eſſe ſemper poſitivas, ſive radices ipſæ ſint poſitivæ, ſive negativæ; poteſtates verò impares eſſe ejuſdem generis cum ipſis radicibus, nimirum poſitivas, quum radices ſunt poſitivæ, & negativas, quum viciſſim radices ſunt nega-

tivæ. Hinc enim ſequitur, quod ſi radix fuerit $a + b$, partes omnes ſint ſimul conjungendæ ſigno $+$; quod ſi verò fuerit $a - b$, mutanda ſint ſigna iis tantùm partibus, in quibus quantitatis negativæ $-b$ poteſtates impares occurrunt, cujusmodi ſunt illæ, quæ locis paribus poſitæ reperiuntur.

Itaque ſi radicis $a + b$ quæratur ea poteſtas, quam deſignat generaliter, ac indefinitè exponens m, erit illa

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 \text{ \&c.}$$

Et quoniam exponens generalis m poteſt omnem quemcumque numerum repræſentare; perſpicuum eſt, poteſtatem illam omnes etiam poteſtates continere, atque adeo formulam eſſe generalem omnium poteſtatum, ad quas radix $a + b$ poteſt attolli. Determinabitur autem generalis illa poteſtas, ſi utique exponens ipſe generalis m determinetur. Qua ratione ſi quæratur quadratum, ſive ſecunda poteſtas radicis $a + b$, quia exponens generalis m fit 2, mutabitur poteſtas illa generalis in hanc

aliam

aliam $a^2 + 2ab + b^2$. Et ſimiliter ſi quæratur cubus, ſive tertia poteſtas ejuſdem radicis $a + b$, quia generalis exponens m fit 3, eadem illa generalis poteſtas vertetur in hanc aliam $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Quod ſi radicis $a - b$ quæratur ea poteſtas, quam deſignat generaliter, ac indefinitè exponens m, erit illa

$$a^m - \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3 \text{ \&c.}$$

Atque hìc quoque, quia exponens generalis m poteſt omnem quemcumque numerum exhibere, palam eſt, poteſtatem iſtam omnem quamcumque poteſtatem repræſentare, atque adeo formulam eſſe generalem omnium poteſtatum, ad quas radix $a - b$ poteſt elevari. Sed determinatur hæc eadem generalis poteſtas, determinando quoque generalem illum exponentem m. Qua ratione ſi quæratur quadratum, ſive ſecunda poteſtas radicis $a - b$, quia exponens generalis m fit 2, evadet generalis illa poteſtas $a^2 - 2ab + b^2$. Pariterque ſi quæratur cubus, ſive tertia poteſtas

 ejuſ-

ejuſdem radicis $a - b$, quia generalis exponens m ſit 3, eadem illa poteſtas generalis evadet $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

Jam ope harum formularum non modò ad quamcumque poteſtatem attolli poteſt radix, quæ duabus partibus conſtet, verùm etiam quæcumque plures, quàm duas partes comprehendat; ſcilicet ſi omnes partes priores, velut una, conſiderentur. Oporteat, exempli gratia, ad quadratum attollere radicem tribus partibus conſtantem $c + d + b$. Conſiderentur partes duæ priores $c + d$ velut una, ita ut radix duabus tantùm partibus conſtare cenſeatur. Et quoniam prima formula generalis, quum quadratum quæritur, mutatur in hanc aliam $a^2 + 2ab + b^2$; ſatis erit in iſta ponere $c + d$ ubi reperitur a; & quadratum ex $c + d$, ubi ipſius a quadratum occurrit. Unde factis hiſce ſubſtitutionibus, erit $c^2 + 2cd + d^2 + 2cb + 2db + b^2$ quadratum ex radice tribus partibus conſtante $c + d + b$.

Oporteat ſimiliter, ad cubum elevare radicem $c - d - b$, quæ tribus partibus conſtat. Conſiderentur adhuc partes duæ priores $c - d$ velut una, ita ut radix non plures, quàm duas partes cenſeatur habere. Et quoniam ſecũda formula generalis,

quum

quũ cubus quæritur, vertitur in hanc aliã $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$; ſatis erit in iſta ponere $c - d$, ubi reperitur a; quadratum ex $c - d$, ubi reperitur quadratum ipſius a; ac denique cubum ex $c - d$, ubi ejuſdem a cubus occurrit. Quocirca factis omnibus hiſce ſubſtitutionibus, erit $c^3 - 3c^2d + 3cd^2 - d^3 - 3c^2b + 6cdb - 3d^2b + 3cb^2 - 3db^2 - b^3$ cubus ex radice $c - d - b$, quæ tribus partibus conſtat.

Sed quemadmodum poteſtates ex radicibus, cujus duæ ſunt partes, fieri non poſſunt, niſi priùs ſciatur, qua ratione fiant poteſtates ex radicibus ſimplicibus; ſic perſcicuum eſt, poteſtates ex radicibus compoſitis, quæ plures, quàm duas, partes continent, fieri nequaquam poſſe, niſi priùs qua ratione fiant ex radicibus, quæ continent partes una pauciores, probè intelligatur. Sic, ut formetur quadratum ex radice tribus partibus cõſtante $c + d + b$, neceſſe eſt priùs, ut ſciatur, qua ratione formetur quadratum ex radice $c + d$, cujus duæ ſunt partes. Et ſimiliter, ut formetur cubus ex radice $c - d - b$, quæ tribus quoque partibus conſtat, ſcire priùs oportet, qua ratione fiat, tam quadratum; quàm cubus ex radice $c - d$, quæ duas tantùm continet partes.

IV.

Vſus conſtructæ formulæ in conficiendis ſeriebus infinitis oſtenditur.

ETſi nomen poteſtatis eas vulgò deſignet quantitates, quæ oriuntur ex reiterata alicujus per ſe ipſam multiplicatione, quæque exponentes habent numeros integros poſitivos: idem tamen nomen ad alias quantitates deſignandas poſſe applicari, quæ oriantur, vel à diviſione, vel ab extractione radicum, jam ſuperiùs innuimus; quum iſtæ etiam quantitates ſuos habeant exponentes, vel integros quidem, ſed negativos, vel fractos tum poſitivos, cùm negativos. Atque hac ratione duplicem poteſtatum diviſionem attulimus; unam nempe in poteſtates negativas, & poſitivas; alteram in poteſtates perfectas, & imperfectas.

Jam tametſi formula, ſuperiùs exhibita, pro iis tantùm poteſtatibus conſtructa videatur, quæ dici merentur perfectæ poſitivæ, quia ipſorum exponentes ſunt numeri integri poſitivi; nihil tamen vetat, quominùs eadem formula aliis etiam poteſtatibus applicetur. Nam quemadmodum

dum expreſſo iſta a^m omnes quaſcumque poteſtates ipſius a, ſive perfectas, ſive imperfectas, ſive poſitivas, ſive negativas poteſt repræſentare: quia ſcilicet exponens generalis m omnem quemcumque numerum, ſive integrum, ſive fractum, ſive poſitivum, ſive negativum potis eſt exhibere; ita quoque propter eundem exponentem generalem m formula illa generalis omnes quaſcumque poteſtates ex radice, cujus duæ ſunt partes, poterit exhibere.

Id ut plenius conſtet, oſtendamus primùm, qua ratione formulæ illius beneficio elevetur radix aliqua, cujus duæ ſunt partes ad poteſtatem, quæ exponentem habeat numerum integrum negativum. Itaque oporteat, radicem $a + b$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit -1. Et quoniam formula generalis poteſtatum ex radice $a + b$ eſt

$$a^m + \frac{m}{1} a^{m-1} b + \frac{m.m-1}{1.2} a^{m-2} b^2$$

$$+ \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{m-3} b^3$$ &c., ſatis erit in hac formula loco exponentis generalis m ſubſtituere exponentem illum ſpecialem

-1. Quod quidem ſi fiat, mutabitur formula illa generalis in hanc aliam

$$a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^{2} - a^{-4}b^{3} \text{ \&c.}$$

Unde poteſtas ex $a + b$, cujus exponens ſit -1, erit $a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^{2} - a^{-4}b^{3}$ &c.

Ad hoc autem oſtendendum, conſiderare priùs oportet, quod quantitas $a + b$ elevata ad poteſtatem, cujus exponens ſit -1, juxta ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, tantundem valeat, ac $\frac{1}{a+b}$: Ex quo fit, ut idem ſit quantitatem $a + b$ ad eam poteſtatem attollere, quàm unitatem per quantitatem illam dividere. Quocirca, quum ex hac diviſione oriatur ſeries infinita $\frac{1}{a} - \frac{b}{a^{2}} + \frac{b^{2}}{a^{3}} - \frac{b^{3}}{a^{4}}$ &c., id tantùm erit oſtendendum, quod ſeries illa interminata $a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^{2} - a^{-4}b^{3}$ &c. ab hac alia non differat. Quod quidem perſpicuum eſt: quandoquidem a^{-2}

idem

idem valet, ac $\frac{1}{ab^2}$; $a^{-2}b$ idem, ac $\frac{b}{a^2}$; $a^{-3}b^2$ idem, ac $\frac{b^2}{a^3}$; atque ita deinceps.

Oportet ſimiliter, quantitatem $a + b$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit -2. Subſtituatur in formula illa generali loco exponentis indeterminati m exponens iſte determinatus -2. Et quoniam hac facta ſubſtitutione, generalis illa formula vertitur in hanc aliam $a^{-2} - 2a^{-3}b + 3a^{-4}b^2 - 4a^{-5}b^3$ &c., erit ſeries iſta interminata poteſtas quæſita ipſius $a + b$. Neque id dubitationem admittit: nam quantitas $a + b$ elevata ad poteſtatem, cujus exponens ſit -2, tantundem valet, ac unitas diviſa per quadratum ipſius $a + b$: Et profectò ex hac diviſione non alia oritur ſeries, quàm $\frac{1}{a^2} - \frac{2b}{a^3} + \frac{3b^2}{a^4} - \frac{4b^3}{a^5}$ &c., quæ ab illa non differt.

Atque hinc modò liquet, mediante formula illa generali nullo negotio confici poſſe ſeries infinitas, quæ à diviſione oriuntur. Nam ſi oporteat, exempli gratia,

tia, in ſeriem infinitam convertere fractionem $\frac{b}{a+c}$; quia fractio iſta oritur, multiplicando b per $\frac{1}{a+c}$, atq; $\frac{1}{a+c}$ tantundem valet, ac quãtitas $a+c$, elevata ad poteſtatẽ, cujus exponẽs ſit -1; ſatis erit quantitatem $a+c$, quæ eſt denominator propoſitæ fractionis ad poteſtatem iſtam attollere, omneſque terminos ipſius per numeratorem b multiplicare. Quocirca quia ea poteſtas quantitatis $a+c$, quam deſignat exponens -1, eſt $a^{-1} - a^{-2}c + a^{-3}c^{2} - a^{-4}c^{3} + a^{-5}c^{4}$ &c., hoc eſt $\frac{1}{a} - \frac{c}{a^{2}} + \frac{c^{2}}{a^{3}} - \frac{c^{3}}{a^{4}} + \frac{c^{4}}{a^{5}}$ &c., erit $\frac{b}{a} - \frac{bc}{ac} + \frac{bc^{2}}{a^{3}} - \frac{bc^{3}}{a^{4}} + \frac{bc^{4}}{a^{5}}$ &c. ſeries infinita, in quã fractio propoſita convertitur.

Oſtendamus nunc, qua ratione ejuſdem formulæ beneficio elevetur quantitas aliqua, cujus duæ ſunt partes, ad poteſtatem, quæ exponentem habeat numerum fractum, ſive poſitivum, ſive negativum. Hunc

Hunc in finem oporteat, quantitatem $a^2 + b^2$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit ſemiſſis unitatis. Et quoniam quantitas propoſita non eſt $a + b$, ſed $a^2 + b^2$, duplicentur primò in formula illa generali omnes exponentes, ita ut radix ejus ſit $a^2 + b^2$. Quia ergo duplicatis omnibus exponentibus, generalis illa formula mutatur in hanc aliam

$$a^{2m} + \frac{m}{1} a^{2m-2} b^2 + \frac{m.m-1}{1.2} a^{2m-4} b^4 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{2m-6} b^6 \text{ \&c.,}$$

ſubſtituatur in iſta loco exponentis generalis m ſemiſſis unitatis: quumque hac facta ſubſtitutione prodeat hæc alia

$$a^1 + \frac{1}{2} a^{-1} b^2 - \frac{1}{8} a^{-3} b^4 + \frac{1}{16} a^{-5} b^6$$

&c., erit ſeries iſta interminata poteſtas ex $a^2 + b^2$, cujus exponens ſit ſemiſſis unitatis.

Neque id difficile erit oſtendere, ſi conſideremus quantitatem $a^2 + b^2$ elevatam ad poteſtatem, cujus exponens ſit ſemiſſis unitatis, per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, non differre à radice quadrata ipſius

a^2

$a^2 + b^2$. Hinc enim fit, ut idem omninò ſit, quantitatem $a^2 + b^2$ ad poteſtatem illã attollere, quàm ex $a^2 + b^2$ quadratam radicem extrahere. Quocirca quia extrahendo radicem iſtam, oritur ſeries infinita

$$a + \frac{b^2}{2a} - \frac{b^4}{8a^3} + \frac{1b^6}{16a^5} \text{ \&c.},$$

id tantùm erit oſtendẽdum, quod ſeries illa interminata

$$a^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} a^{-1} b^2 - \frac{1}{8} a^{-3} b^4 + \frac{1}{16} a^{-5} b^6$$

&c. ab hac alia non differat. Quod quidem perſpicuum erit, ſi terminorum poteſtates negativæ in eorundem denominatoribus, velut poſitivæ, reponantur.

Similiter ſi oporteat quantitatem $a^3 + b^3$ ad poteſtatem attollere, cujus exponens ſit triens unitatis, triplico primum in formula illa generali exponentes omnes, ita ut radix ejus ſit $a^3 + b^3$. Et quoniã triplicatis omnibus exponẽtibus, generalis illa formula vertitur in hãc aliam

$$a^{3m} + \frac{m}{1} a^{3m-3} b^3 + \frac{m.m-1}{1.2} a^{3m-6} b^6 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3} a^{3m-9} b^9 \text{ \&c.},$$

ſub-

ſtituatur in iſta loco exponentis generalis m triens unitatis ; quumque facta iſta ſubſtitutione oriatur hæc alia

$$a^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a^{-\frac{2}{3}} b^{3} - \frac{1}{9} a^{-\frac{5}{3}} b^{6} + \frac{5}{81} a^{-\frac{8}{3}} b^{9}$$

&c., erit ſeries iſta interminata poteſtas quæſita ex $a^3 + b^3$. Quod rurſus dubitationem non admittit. Nam per ſuperiùs oſtenſa idem eſt quantitatem $a^3 + b^3$ ad poteſtatem attollere, cujus exponens ſit triens unitatis, ac ex illa radicem cubicam extrahere : & profectò extrahendo radicem cubicam ex $a^3 + b^3$ oritur ſeries infinita $a + \frac{b^3}{3a^2} - \frac{b^6}{9a^5} + \frac{5b^9}{81a^8}$ &c., quæ ab illa non differt.

Unde liquet beneficio ejuſdem formulæ generalis ſeries illas infinitas, quæ ab extractione radicum ſuam trahunt originem, nullo quoque negotio fieri poſſe; quum idem ſit ex quantitate aliqua radicem cujuſcumque ordinis extrahere, ac eandem illam quantitatem ad poteſtatem aliquam imperfectam poſitivam attollere. Cæterùm nolim miremini, quod in proferẽdis exemplis circa elevationem quantitatum ad poteſtates imperfectas poſitivas,

vas, aſſumpta fuerit quantitas $a^2 + b^2$, quum exponens poteſtatis erat ſemiſſis unitatis; & $a^3 + b^3$, quum idem exponens unitatis trientem adæquabat. Id enim unicè factum, ne poteſtatum termini quantitates radicales involverent, & ut pateret veritas rei, conferendo poteſtates earum quantitatum cum ſeriebus infinitis, quæ extrahendo radices ex iiſdem quantitatibus ſuperiùs inventæ ſunt. Nam de reliquo poterat etiam ad poteſtates illas attolli ipſa quantitas $a + b$, ad quam poteſtatum formula generalis propriè refertur.

Sed addamus unum, aut alterum exemplum circa elevationem quantitatū ad poteſtates imperfectas negativas. Oporteat itaque quantitatem $a^2 + b^2$ attollere ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-\frac{1}{2}$. Duplicentur rurſus exponentes omnes formulæ generalis, & in ea loco exponentis generalis m ſubſtituatur exponēs quæſitæ poteſtatis. Quia ergo formula illa hac facta ſubſtitutione mutatur in hanc aliam

$$a^{-1} - \frac{1}{2} a^{-3} b^{2} + \frac{3}{8} a^{-5} b^{4} - \frac{15}{48} a^{-7} b^{6} \text{ \&c.}$$

&c., erit ſeries iſta interminata poteſtas, ad quam oportet elevare quantitatem $a^2 + b^2$. Atque hujus veritas patebit, ſi extracta ex $a^2 + b^2$ quadrata radice, per ſeriem inde emergentem unitas dividatur. Nam per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, quantitas $a^2 + b^2$ elevata ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-\frac{1}{2}$ non differt à quotiente, qui oritur dividendo unitatem per radicem quadratam ipſius $a^2 + b^2$.

Oporteat etiam, quantitatem $a^3 + b^3$, attollere ad poteſtatem, quæ exponentem habeat $-\frac{1}{3}$. Quoniam quantitas data non eſt $a + b$, ſed $a^3 + b^3$, triplicentur exponentes omnes formulæ generalis; tum in ea loco exponentis generalis m ſubſtituatur exponens quæſitæ poteſtatis; & quia hac facta ſubſtitutione formula illa generalis vertitur in hanc aliam

$$a^{-1} - \frac{1}{3}a^{-4}b^{3} + \frac{2}{9}a^{-7}b^{6} - \frac{14}{81}a^{-10}b^{9}$$

&c., erit ſeries iſta interminata poteſtas, ad quam elevanda eſt quantitas $a^3 + b^3$. Quod cur-

rurſus patebit, ſi extracta ex a^3+b^3 radice cubica, per ſeriem inde emergentem unitas dividatur; quandoquidem ex ſuperiùs oſtenſis, quantitas a^3+b^3 elevata ad poteſtatem, cujus exponens ſit $-\frac{1}{3}$ tantundem valet, ac quotiens, qui oritur, dividendo unitatem per radicem cubicam ipſius a^3+b^3

FINIS LIBRI PRIMI.

Digitized by Google

APPENDIX

De numeris figuratis generum omnium, & de eorundem ſummis indefinitis.

Quum de ſeriebus infinitis diſſeruimus, exhibuimus quidem generalem numerorum figuratorum ideam, ſed deinde eorum tantummodo ſummas determinavimus, qui ex continuâ numerorum naturalium, aliorumque inde ortorum collectione prodeuntes, numeri figurati primi generis à nobis fuerint inſigniti. Id autem non aliunde factum, quàm quia pro conſtituendâ poteſtatum formulâ generali, quorſum mens noſtra tendebat, dumtaxat numerorum figuratorum primi generis ſummæ requirebantur: quem in finem ſupervacaneum exiſtimavimus,

aliorum numerorum figuratorum ſummas definire, utpote quæ à noſtro ſcopo omnino erant alienæ. Sed quod ibi prætermiſſum à nobis fuit, viſum eſt Appendicis inſtar hoc loco ſubnectere, ut ſcilicet Tyrones noſtros nihil lateat eorum, quæ ad plenam horum numerorum cognitionem, alioqui jucundiſſimam, pertinere videntur.

Itaque diximus citato loco, numeros figuratos vocari non modò eos, qui oriuntur ex collectione continuâ aliorum, æquali intervallo ab unitate progredientium, verùm etiam, qui ex inde ortorum numerorum continuâ additione generantur. Sed ibidem explicuimus quoque, qua ratione numeri iſti figurati in varia genera diſtingui poſſint, nimirum pro diverſitate intervalli, quo numeri genitores, hoc eſt ab initio aſſumpti progrediuntur: adeo ut dici debeant generis primi, quorum genitores intervallo unitatis progrediuntur; dici debeant generis ſecundi, qui genitores habent intervallo binarii progredientes; atque ita deinceps. Quin etiam innuimus eodem loco, cujuſcumque generis numeros figuratos in varios ordines diſtingui poſſe, pro diverſâ ratione, qua ex ſuis genitoribus oriri intel-

telliguntur; vocando nempe in unoquoque genere numeros figuratos ordinis primi, qui oriuntur ex collectione continuâ numerorum genitorum; numeros figuratos ordinis ſecundi, qui ex additione continuâ numerorum figuratorum primi ordinis generantur; atque ita continuò.

Jam, qua ratione in primo genere definiantur ſummæ numerorum figuratorum cujuſcumque ordinis, ſatis ſuperque ibidem oſtenſum fuit: nimirum faciendo duas progreſſiones arithmeticas, ambas aſcendentes per unitatis incrementum, unam quidem à multitudine terminorum in unam ſummam colligendorum, alteram ab unitate, & utramque tot terminorum, quot deſignat exponens ordinis numerorum, duabus unitatibus auctus; nam multiplicando deinde per ſe mutuò tam terminos prioris progreſſionis, quàm terminos alterius, & dividendo productum ex primis per productum ex ſecundis, dabit quotiens ex hac diviſione ortus ſummam quæſitam. Atque hunc canonem locum etiam habere diximus pro determinandâ ſummâ numerorum genitorum, ex quibus numeri figurati primi generis derivantur, ſi ſcilicet inter ordines numerorum figuratorum ſub-

inde reponantur, ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum.

Oſtendendum nobis modò eſt, qua ratione determinari poſſint in aliis generibus ſummæ numerorum figuratorum cujuſque ordinis: id quod factu facile erit ex cognitis ſummis numerorum figuratorum generis primi. Etſi enim numeri figurati aliorum generum ſuos quoque habeant genitores, attamen quemadmodũ genitores iſti certo quodam modo derivantur ex genitoribus numerorum figuratorum primi generis, ita & ipſi numeri figurati aliorum generum poſſunt ratione non diſſimili erui ex numeris figuratis generis primi: quod equidem quum ſit, methodus nobis ſuboritur valde facilis, ac expedita pro determinandis ſummis ipſorum. Id itaque oſtendemus primò in numeris illis, quos vocamus genitores numerorum figuratorum, quiq; à Veteribus numeri polygoni, ſive multanguli dicebantur; tum deinde in ipſis numeris figuratis, ſingulos cujuſque generis ordines conſtituentibus, ejuſdem methodi periculum faciemus.

De

I.

De genitoribus numerorum figuratorum cujuſcumque generis in unam ſummam colligendis.

GEnitores numerorum figuratorum vocamus numeros illos, qui æquali intervallo ab unitate progrediuntur, & ex quorum collectione continuâ ipſi numeri figurati intelliguntur oriri. Quemadmodum autem genitores figuratorum primi generis ſunt numeri naturales 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., hoc eſt numeri ab unitate per unitatis intervallum progredientes; ita genitores figuratorum ſecundi generis ſunt numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., qui progrediuntur ab unitate per intervallum binarii; genitores figuratorum tertii generis ſunt numeri 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c., qui progrediuntur ab unitate per intervallum ternarii; atque ita deinceps.

Hujuſmodi numeri genitores hanc habent proprietatem: nimirum, quod ſi genitoribus primi generis præfigatur zero, ſeu cyphra, iique ordine adjungantur genitoribus cujuſcumq; generis; numeri,

qui inde oriuntur, ſint genitores generis ſequentis. Hac ratione ſi numeri 0,1,2,3, 4, 5,6,&c.,qui ſunt genitores primi generis cyphram habentes in principio,addantur ordine ipſis numeris genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., orientur numeri 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., qui ſunt genitores generis ſecundi. Pariterque ſi numeri 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. addantur ordine genitoribus ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c.,habebuntur numeri 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c., qui ſunt genitores generis tertii. Atque ita quoque ſi iidem numeri 0,1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. ordine adjugantur genitoribus tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, &c., producentur numeri 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c., qui ſunt genitores generis quarti.

Hac mediante proprietate, facile erit, ex genitoribus primi generis,cujuſcumq; alterius generis genitores derivare. Si enim genitoribus primi generis cyphra,ſeu zero præfigatur, iique toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum genitorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis primi generis genitoribus, habebuntur genitores generis quæſiti. Ita, ſi quærantur genitores generis quar-

quarti, capiatur ter unuſquiſque numerorum o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., qui ſunt genitores primi generis, cyphram habentes ab initio, ita ut evadant o, 3, 6, 9, 12, 15, 18, &c.; deinde addantur ordine genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., eruntque numeri prodeuntes 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, &c. genitores generis quarti. Similiter, ſi deſiderentur genitores generis ſeptimi, ſumatur ſexies quilibet eorundem numerorum o, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., ut fiant o, 6, 12, 18, 24, 30, 36, &c., tum addantur ordine genitoribus primi generis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, &c., & qui inde oriuntur numeri 1, 8, 15, 22, 29, 36, 43, &c. erunt genitores generis ſeptimi.

Unde modò cognitâ ſummâ genitorum primi generis, facile etiam erit cujuscumque alterius generis genitorum ſummam invenire. Quum enim genitores cujuſcumque alterius generis habeantur, ſi genitoribus generis primi cyphra, ſeu zero præfigatur, iique toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum genitorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis primi generis genitoribus; perſpicuum eſt, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam genito-

rum totidem, quot deſignat numerus m, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot genitores primi generis, quot deſignat numerus $m - 1$, & ſummam iſtam toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum genitorum, unâ demptâ, conjungere cum ſummâ, quæ oritur ex additione tot aliorum genitorum primi generis, quot deſignat ipſe numerus m.

Jam per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot genitoribus primi generis quot deſignat numerus m, eſt ſemiſſis ejus, quod oritur multiplicando m per $m + 1$; atque ita quoque ſumma ex tot genitoribus ejuſdem primi generis, quot deſignantur per $m - 1$, eſt ſemiſſis ejus, quod producitur, multiplicando $m - 1$ per m. Quocirca quia primum productum eſt $m^2 + m$, productum verò ſecundum eſt $m^2 - m$; invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot genitorum, quot denotat numerus m, ſi ad $\frac{m^2 + m}{2}$ addatur toties $\frac{m^2 - m}{2}$, quot unitates habet exponens generis addendorum genitorum, unâ demptâ; hoc eſt ſemel, ſi genitores

ad-

addendi fuerint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Itaque, quia ſi ad $\frac{m^2 + m}{2}$ ſemel addatur $\frac{m^2 - m}{2}$, ſumma tota eſt $\frac{2m^2 + om}{2}$; fiet hinc, ut $\frac{2m^2 + om}{2}$ ſit ſumma ex tot genitoribus generis ſecundi, quot deſignat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $\frac{m^2 - m}{2}$ bis ad $\frac{m^2 + m}{2}$ eſt $\frac{3m^2 - m}{2}$; erit $\frac{3m^2 - m}{2}$ ſumma ex tot genitoribus generis tertii, quot deſignat idē numerus m. Atque ita quoq; erit $\frac{4m^2 - 2m}{2}$ ſumma ex tot genitoribus generis quarti, quot deſignantur per eundem numerum m; quandoquidem id, quod gignitur, addendo $\frac{m^2 - m}{2}$ ter ad $\frac{m^2 + m}{2}$ eſt $\frac{4m^2 - 2m}{2}$. Nec diſſimili ra-

tio-

tione cujuſcumq; altioris generis genitorum ſummæ indefinitæ poterunt definiri; quæ tamen eo ordine, quo ad ſua genera referuntur, ita ſe habent, ſi utique in omni genere fuerit m numerus genitorum in unam ſummam addendorum.

I.	$\frac{1m^2 + 1m}{2}$	VI.	$\frac{6m^2 - 4m}{2}$
II.	$\frac{2m^2 + 0m}{2}$	VII.	$\frac{7m^2 - 5m}{2}$
III.	$\frac{3m^2 - 1m}{2}$	VIII.	$\frac{8m^2 - 6m}{2}$
IV.	$\frac{4m^2 - 2m}{2}$	IX.	$\frac{9m^2 - 7m}{2}$
V.	$\frac{5m^2 - 3m}{2}$	X.	$\frac{10m^2 - 8m}{2}$.

Unde patet; ſummas iſtas indefinitas numerorum genitorum cujuſcumque generis miro quidem ordine progredi in infinitum;neq; adeo neceſſarium eſſe, expoſito artificio ſingulas invenire. Eſt enim unaquæque ſemiſſis quantitatis, quæ duo-

duobus terminis conſtat; atque horum terminorum primi conſtituuntur, multiplicando numeros, qui ab unitate per unitatis intervallum progrediuntur, per quadratum numeri *m*, qui deſignat, quot genitores in unum ſunt addendi; ſecundi verò, multiplicando numeros, qui ab unitate per unitatis intervallum regrediuntur, per ipſum numerum *m*: ex quo fit, ut ad inveniendam in unoquoque genere ſummam tot genitorum, quot deſignat numerus *m*, poſſit hæc regula generalis adhiberi.

Capiatur quadratum numeri *m* toties, quot unitates continet exponens generis datorum genitorum; tum ipſe numerus *m* toties etiam accipiatur, quot unitates continet id, quod ſupereſt, ſubtrahendo eundem exponentem ex binario; denique addantur in unum, qui inde oriuntur numeri, & ſummæ ſemiſſis id, quod quæritur, exhibebit. Ut ſi velim, exempli gratia, addere in unum priores ſex numeros genitores quinti generis, quia quadratum numeri 6 quinquies ſumptum eſt 180, & ipſe numerus 6 toties acceptus, quot ſunt unitates in 2 — 5, hoc eſt in — 3, eſt — 18; erit ſumma utriuſque numeri 180 — 18, hoc eſt 162; adeo-

adeoque hujus ſemiſſis 81 erit ſumma priorum ſex genitorum quinti generis.

II.

De numeris figuratis, qui primum ordinem cujuſque generis conſtituunt, in unum addendis.

Numeri figurati, qui primum ordinem in unoquoque genere conſtituunt ſunt illi, qui oriuntur ex continuâ collectione eorum, quos genitores illius generis appellamus. Ita, quia genitores primi generis ſunt 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 &c., figurati, qui in eodem primo genere primum ordinem conſtituunt, erunt numeri 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui ex illorum additione continuâ producuntur. Et ſimiliter, quia genitores ſecundi generis ſunt 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, &c., figurati, qui in eodem ſecundo genere primum ordinem conſtituunt, erunt numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., qui ex collectione continuâ eorum oriuntur.

Hujuſmodi numeri, qui primum ordinem figuratorum in omni genere conſtituunt, hanc habent proprietatem, nimi-

mirum, quod ſi iis, qui ſunt primi generis, præfigatur zero, ſive cyphra, iidemque ordine adjungantur numeris, qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in quovis alio genere, qui inde oriuntur numeri ſint figurati primi ordinis generis ſubſequentis. Hac ratione ſi numeri 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., qui ſunt figurati primi ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipſis numeris 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., qui ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo. Pariterque ſi iidem numeri 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c. addantur ordine numeris 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum ſecundi generis, habebuntur numeri, 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, &c, qui ſunt figurati primi ordinis in genere tertio.

Hujus proprietatis beneficio facile erit ex numeris, qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui ſint figurati primi ordinis in quovis alio genere. Si enim iis, qui ſunt primi generis, cyphra, ſeu zero

ro præfigatur, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis numeris, qui primum ordinem figuratorum in primo genere conſtituunt, habebuntur figurati primi ordinis generis quæſiti. Ita ſi quærantur figurati primi ordinis generis quarti, capiatur ter unuſquiſque numerorum 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., qui ſunt figurati primi ordinis in genere primo, cyphram habentes ſub initium, ita ut evadant 0, 3, 9, 18, 30, 45, 63, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum primi generis; eruntque numeri prodeuntes 1, 6, 15, 28, 45, 60, 91, &c. figurati primi ordinis in genere quarto. Similiter ſi deſiderentur figurati primi ordinis generis ſexti, ſumatur quinquies quilibet eorundem numerorum 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, &c., ut fiant 0, 5, 15, 30, 50, 75, 105, &c., tum addantur ordine numeris 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c., qui ſunt figurati primi ordinis in genere primo; & qui inde oriuntur numeri 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, &c. erunt figurati primi ordinis generis ſexti.

Atque hinc modò cognitâ ſummâ numerorum, qui ſunt figurati primi ordinis in genere primo, facile etiam erit, cujuſcumque alterius generis figuratorum primi ordinis ſummam invenire. Quum enim figurati primi ordinis in omni alio genere habeantur, ſi iis, qui ſunt generis primi, præfigatur cyphra, ſeu zero, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum figuratorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis figuratis primi ordinis in genere primo; perſpicuum eſt, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam totidem figuratorum primi ordinis, quot deſignat numerus *m*, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot figuratos primi ordinis in genere primo, quot deſignat numerus $m-1$, & ſummam iſtam toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ, conjungere cum ſummâ, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo primum ordinem conſtituunt, quot deſignat ipſe numerus *m*.

Jam per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis primi or-

di-

dinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur multiplicando per ſe mutuò tres iſtos numeros $m, m + 1, m + 2$, & dividendo productum $m^3 + 3m^2 + 2m$ per 6; atque ita quoque ſumma ex tot figuratis primi ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m - 1$, habetur multiplicando per ſe mutuò tres iſtos numeros $m - 1, m, m + 1$, & productum $m^3 - m$ dividendo ſimiliter per 6. Quocirca, quia quotiens, qui oritur ex primâ diviſione, eſt $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$, & quotiens, qui oritur ex ſecundâ, eſt $\frac{m^3 - m}{6}$; invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum primi ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$ addatur toties $\frac{m^3 - m}{6}$, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ; hoc eſt ſemel, ſi figurati addendi ſint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Ita-

Itaque, quia ſi ad $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$ ſemel addatur $\frac{m^3 - m}{6}$, ſumma tota eſt $\frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6}$; erit quantitas iſta ſumma ex tot figuratis primi ordinis in genere ſecundo, quot deſignat numerus m. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo $\frac{m^3 - m}{6}$ bis ad $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$ eſt $\frac{3m^3 + 3m^2 + 0m}{6}$, erit hæc alia quantitas ſumma ex tot figuratis primi ordinis in genere tertio, quot deſignat idem adhuc numerus m. Atque ita quoque erit $\frac{4m^3 + 3m^2 - m}{6}$ ſumma ex tot figuratis primi ordinis in genere quarto, quot deſignantur per eundem numerum m; quandoquidem id, quod producitur, addendo $\frac{m^3 - m}{6}$ ter ad $\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$ eſt quantitas illa. Eodemque artificio pro-

gredi licebit in infinitum, ſummaſque indefinitas determinare numerorum, qui in altioribus generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt. Sed hæ interim ſummæ eo ordine, quo ad ſua genera referuntur, ita ſe habent, ſi utique in omni genere fuerit m numerus figuratorum primi ordinis in unam ſummam addendorum.

I. $$\frac{m^3 + 3m^2 + 2m}{6}$$

II. $$\frac{2m^3 + 3m^2 + 1m}{6}$$

III. $$\frac{3m^3 + 3m^2 + 0m}{6}$$

IV. $$\frac{4m^3 + 3m^2 - 1m}{6}$$

V. $$\frac{5m^3 + 3m^2 - 2m}{6}$$

VI. $$\frac{6m^3 + 3m^2 - 3m}{6}$$

VII. $$\frac{7m^3 + 3m^2 - 4m}{6}$$

VIII. $\frac{8m^3 + 3m^2 - 5m}{6}$

IX. $\frac{9m^3 + 3m^2 - 6m}{6}$

X. $\frac{10m^3 + 3m^2 - 7m}{6}$

Ex quo patet, ſummas iſtas indefinitas numerorum, qui in omni genere primum figuratorum ordinem conſtituunt, miro quidem ordine progredi in infinitum: quo utique conſiderato, haud quidem neceſſe eſt, expoſito artificio ſingulas invenire. Eſt enim unaquæque ſexta pars quantitatis, quæ tribus terminis conſtat; atque horum terminorum primi conſtituuntur, multiplicando numeros naturales per cubum numeri *m*, qui deſignat, quot figurati in unum ſunt addendi; ſecundi, multiplicando numerum ternarium per quadratum ejuſdem numeri *m*; & tertii, multiplicando numeros, qui à binario per unitatis intervallum regrediuntur per ipſum numerum *m*: ex quo fit, ut ad inveniendam in unoquoque genere ſummam tot figuratorum primi ordinis, quot deſignat

numerus *m*, poſſit hæc regula generalis adhiberi.

Capiatur cubus numeri *m* toties, quot unitates continet exponens generis datorum figuratorum; tum ipſe numerus *m* toties etiam accipiatur, quot unitates continet id, quod relinquitur, ſubtrahendo eundem exponentem ex ternario; denique qui inde oriuntur numeri addantur cum triplo quadrati ejuſdem numeri *m*; & ſexta pars ſummæ id, quod quæritur, exhibebit. Ut ſi velim, exempli gratiâ, addere in unum priores ſex numeros figuratos primi ordinis in genere quinto, quia cubus numeri 6 quinquies ſumptus eſt 1080, & ipſe numerus 6 toties acceptus, quot ſunt unitates in 3 — 5, hoc eſt in — 2 eſt — 12, additis duobus hiſce numeris cum triplo quadrati, quod fit ex eodem numero 6, hoc eſt cum 108, erit ſumma omnium 1080 — 12 + 108, hoc eſt 1176: proindeque hujus ſexta pars 196 erit ſumma numerorum, qui ſunt ſex priores figurati primi ordinis in genere quinto.

De

III.

De ſummis numerorum, qui ſecundum figuratorum ordinem in omni genere conſtituunt.

NUmeri, qui ſecundum figuratorum ordinem in unoquoque genere conſtituunt, ſunt illi, qui oriuntur ex continuâ collectione eorum, quos figuratos primi ordinis in eodem genere vocamus. Ita, quia in primo genere figurati primi ordinis ſunt 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, &c.; figurati, qui in eodem primo genere ſecundum ordinem conſtituunt, erunt numeri 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c., qui ex illorum additione continuâ producuntur. Et ſimiliter, quia in ſecundo genere figurati primi ordinis ſunt 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, &c.; figurati, qui in eodem ſecundo genere ordinem ſecundum conſtituunt, erunt numeri 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, &c., qui ex collectione continuâ eorum oriuntur.

Numeri iſti, qui ſecundum ordinem figuratorum in omni genere conſtituunt, hanc habẽt proprietatem: nimirum, quod ſi iis, qui ſunt primi generis, præfigatur

zero, ſive cyphra, iidemque ordine adjungantur numeris, qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum in quovis alio genere, qui inde oriuntur numeri, ſint figurati ſecundi ordinis generis ſubſequentis. Hac ratione, ſi numeri 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipſis numeris 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c, qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere ſecundo. Pariterque, ſi iidem numeri 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c. addantur ordine numeris 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, &c., qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum ſecundi generis, habebuntur numeri 1, 6, 18, 40, 75, 126, 196, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere tertio.

Ope hujus proprietatis haud difficile erit ex numeris, qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui ſint figurati ſecundi ordinis in quovis alio genere. Si enim iis, qui ſunt primi generis, cyphra, ſeu zero præfigatur, iidemque toties ace-

cepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis numeris, qui ſecundum ordinem figuratorum in primo genere conſtituunt, habebuntur figurati ſecundi ordinis generis quæſiti. Ità, ſi quærantur figurati ſecundi ordinis generis quarti, capiatur ter unuſquiſque numerorum 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere primo, cyphram habentes ſub initium, ita ut evadant 0, 3, 12, 30, 60, 105, 168, &c., tum addantur ordine numeris 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c., qui conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum primi generis, eruntque numeri prodeuntes 1, 7, 22, 50, 95, 161, 252, &c. figurati ſecundi ordinis in genere quarto. Similiter ſi deſiderentur figurati ſecundi ordinis generis ſexti, ſumatur quinquies quilibet eorundem numerorum 0, 1, 4, 10, 20, 35, 56, &c., ut fiant 0, 5, 20, 50, 100, 175, 280, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c., qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere primo; & qui inde oriuntur numeri 1, 9, 30, 70, 135, 231, 364, &c. erunt figurati ſecundi ordinis generis ſexti.

Unde modò cognitâ ſummâ numerorum, qui ſunt figurati ſecundi ordinis in genere primo, facile etiã erit, cujuſcumq; alterius generis figuratorum ſecundi ordinis ſummam invenire. Quum enim figurati ſecũdi ordinis in omni alio genere habeantur, ſi iis, qui ſunt generis primi, præfigatur cyphra, ſeu zero, iidemq; toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum figuratorũ, unâ demptâ, addantur ordine ipſis figuratis ſecundi ordinis in genere primo; perſpicuum eſt, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam totidem figuratorum ſecundi ordinis, quot deſignat numerus *m*, non aliud fieri debere, quàm in unũm addere tot figuratos ſecundi ordinis in genere primo, quot deſignat numerus $m - 1$, & ſummam iſtam toties ſumptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ, conjungere cum ſummâ, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo ſecundum ordinem conſtituunt, quot deſignat ipſe numerus *m*.

Jam ex iis, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in genere primo, quot deſignat numerus *m*, ha-

m, habetur multiplicando per ſe mutuò quatuor iſtos numeros m, $m+1$, $m+2$, $m+3$, & dividendo productum $m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m$ per 24; atque ita quoque ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in eodem primo genere, quot deſignat numerus $m-1$, habetur multiplicando per ſe mutuò quatuor iſtos numeros $m-1$, m, $m+1$, $m+2$, & productum $m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m$ dividendo ſimiliter per 24. Quocirca, quia quotiens, qui oritur ex primâ diviſione, eſt $\frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}$, & quotiens, qui oritur ex ſecundâ, eſt $\frac{m^4 + 2m^3 - m^2 - 2m}{24}$; invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum ſecundi ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad primum illum quotientem addatur toties quotiens iſte ſecundus, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ; hoc eſt ſemel, ſi figurati addendi ſint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Itaque, quia ſi priori quotienti addatur ſemel quotiens ſecundus, ſumma tota eſt

$2m^4$

$\frac{2m^4 + 8m^3 + 10m^2 + 4m}{24}$; erit quantitas iſta ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in ge ere ſecundo, quot deſignat numerus *m*. Pariterque, quia id, quod oritur, addendo priori quotienti bis eundem illum quotientem ſecundum, eſt $\frac{3m^4 + 10m^3 + 9m^2 + 2m^2}{24}$; erit hæc alia quantitas ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in genere tertio, quot deſignat idem numerus *m*. Atque ita quoque erit $\frac{4m^4 + 12m^3 + 8m^2 + 0m^2}{24}$ ſumma ex tot figuratis ſecundi ordinis in genere quarto, quot deſignantur per eundem numerum *m*; quandoquidem id, quod producitur, addendo priori quotienti ter quotientem ſecundum, eſt quantitas illa. Nec diſſimili ratione licebit progredi in infinitum, ſummaſque indefinitas determinare numerorum, qui in altioribus generibus ſecundum figuratorum ordinem conſtituunt. Sed horum interim figuratorum ſummæ eo ordine, quo ad ſua genera referuntur, ita ſe habent, ponen-

nendo ſemper, quod in omni genere m ſit numerus figuratorum ſecundi ordinis in unam ſummam addendorum.

I. $$\frac{m^4 + 6m^3 + 11m^2 + 6m}{24}$$

II. $$\frac{2m^4 + 8m^3 + 10m^2 + 4m}{24}$$

III. $$\frac{3m^4 + 10m^3 + 9m^2 + 2m}{24}$$

IV. $$\frac{4m^4 + 12m^3 + 8m^2 + 0m}{24}$$

V $$\frac{5m^4 + 14m^3 + 7m^2 - 2m}{24}$$

VI. $$\frac{6m^4 + 16m^3 + 6m^2 - 4m}{24}$$

VII. $$\frac{7m^4 + 18m^3 + 5m^2 - 6m}{24}$$

VIII. $$\frac{8m^4 + 20m^3 + 4m^2 - 8m}{24}$$

IX.

$$\text{IX.}\quad \frac{9m^4 + 22m^3 + 3m^2 - 10m}{24}$$

$$\text{X.}\quad \frac{10m^4 + 24m^3 + 2m^2 - 12m}{24}$$

Unde patet, ſummas iſtas indefinitas numerorum, qui in ſingulis generibus ſecundum figuratorum ordinem conſtituunt, progredi in infinitum miro quidem, ad quem attendentes haud equidem neceſſum habemus, expoſito artificio ſingulas invenire. Eſt enim unaquæque vigeſima quarta pars quantitatis, quæ quatuor terminis conſtat; atque horum terminorum primi conſtituuntur, multiplicando numeros naturales per quadratoquadratum numeri *m*, qui deſignat, quot figurati in unum ſunt addendi; ſecundi, multiplicando numeros, qui à 6 binarii intervallo progrediuntur, per cubum ejuſdem numeri *m*; tertii, multiplicando numeros, qui à 11 intervallo unitatis regrediuntur, per quadratum ejuſdem adhuc numeri *m*; & quarti, ſive poſtremi, multiplicando numeros, qui à 6 binarii intervallo regrediuntur, per ipſum numerum *m*. Ex quo fit, ut ad inveniendas in unoquoque genere ſummam tot figu-

guratorum ſecundi ordinis, quot deſignat numerus m, poſſit hæc regula generalis adhiberi.

Capiatur primò quadrato-quadratum numeri m toties, quot unitates habet exponens generis datorum figuratorum; ſecundò cubus ejuſdem numeri m toties, quot ſunt unitates in eo, quod oritur, addendo ad numerum 4 duplum ejuſdem exponentis; tertiò quadratum ejuſdem adhuc numeri m toties, quot unitates continet, id, quod ſupereſt, ſubtrahendo eundem exponentem ex numero 12; & denique ipſe numerus m toties etiam accipiatur, quot ſunt unitates in eo, quod remanet, ſubducendo eundem illum exponentem duplicatum ex numero 8. Porrò addantur in unum omnes numeri, exinde prodeuntes; & ſiquidem ſummæ hujus capiatur pars vigeſimaquarta, id quod quæritur, hæc exhibebit.

IV.

De ſummis numerorum, qui alios figuratorum ordines in unoquoque genere conſtituunt.

Quemadmodum in unoquoque genere numeros, qui oriuntur ex colle-

lectione continuâ figuratorum primi ordinis, vocamus figuratos ordinis ſecundi; ita quoque numeros, qui producuntur ex additione continuâ figuratorum ſecundi ordinis, vocamus figuratos ordinis tertii; pariterque dicimus figuratos ordinis quarti, quos exhibent figurati tertii ordinis continuò collecti; figuratos ordinis quinti, quos procreant figurati quarti ordinis continuò etiam additi; atque ita deinceps. Sic, quia in primo genere figurati ſecundi ordinis ſunt 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, &c.; erunt in eodem genere figurati ordinis tertii 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c.; figurati ordinis quarti 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, &c.; figurati ordinis quinti 1, 7, 28, 84, 210, 462, 924, &c.; atque ita in infinitum.

Jam in numeris iſtis, qui in unoquoque genere alios figuratorum ordines conſtituunt, eandem cernere licet proprietatem, quam habent ii, qui conſtituunt priores duos ordines: nimirum quod ſi iis, qui datum aliquem figuratorum ordinem conſtituunt in primo genere, præfigatur zero, ſive cyphra, iidemque ordine adjungantur numeris, qui eundem figuratorum ordinem cōſtituunt

in

in quovis alio genere, qui inde oriuntur numeri ſint figurati ejuſdem ordinis generis ſubſequentis. Hac ratione, ſi numeri 0, 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c., qui ſunt figurati tertii ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipſis numeris 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c., qui conſtituunt tertium ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, &c., qui ſunt figurati tertii ordinis in genere ſecundo. Et ſi iidem numeri 0, 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c. addantur ordine numeris, 1, 6, 20, 50, 105, 196, 336, &c., qui conſtituunt tertium ordinem figuratorum ſecundi generis, habebuntur numeri 1, 7, 25, 65, 140, 266, 462, &c., qui ſunt figurati tertii ordinis in genere tertio.

Eadem ratione, ſi numeri 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c., qui ſunt figurati quarti ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, addantur ordine ipſis numeris 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, &c., qui conſtituunt quartum ordinem figuratorum primi generis, orientur numeri, 1, 7, 27, 77, 182, 378, 714, &c., qui ſunt figurati quarti ordinis in genere ſecundo. Et ſi iidem numeri

ri 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c. addantur ordine numeris 1, 7, 27, 77, 182, 378, 714, &c., qui conſtituunt quartum ordinem figuratorum ſecundi generis, habebuntur numeri 1, 8, 33, 98, 238, 504, 966, &c, qui ſunt figurati quarti ordinis in genere tertio.

Atque hac mediante proprietate facile erit ex numeris, qui conſtituunt datum aliquem ordinem figuratorum in genere primo, derivare numeros, qui ſint figurati ejuſdem ordinis in quovis alio genere. Si enim iis, qui ſunt primi generis cyphra, ſeu zero præfigatur, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis derivandorum numerorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis numeris, qui datum illum ordinem figuratorum conſtituunt in genere primo, habebuntur figurati ejuſdem ordinis generis quæſiti. Ita, ſi quærantur figurati tertii ordinis generis tertii; capiatur bis unuſquiſque numerorum 0, 1, 5, 15, 35, 70, 126, &c., qui ſunt figurati tertii ordinis in genere primo, cyphram habentes ſub initium, ita ut evadant, 0, 2, 10, 30, 70, 140, 252, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 5, 15, 35, 70, 126, 210, &c., qui conſtituunt tertium or-

ordinem figuratorum primi generis; eruntque numeri prodeuntes 1, 7, 25, 65, 140, 266, 462, &c. figurati tertii ordinis in genere tertio.

Similiter, ſi quærantur figurati quarti ordinis ejuſdem generis tertii, capiatur bis unuſquiſque numerorum 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c, qui ſunt figurati quarti ordinis in genere primo, cyphram habentes in principio, ita ut evadant 0, 2, 12, 42, 112, 252, 504, &c., deinde addantur ordine numeris 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, qui conſtituunt quartum ordinem figuratorum primi generis; eruntque numeri prodeuntes 1, 8, 33, 98, 238, 504, 966, &c. figurati quarti ordinis in genere tertio. Atque ita quoque, ſi deſiderentur figurati quarti ordinis in genere quarto, ſumatur ter quilibet eorundem numerorum 0, 1, 6, 21, 56, 126, 252, &c., ut fiant 0, 3, 18, 63, 168, 378, 756, &c., tum addantur ordine numeris 1, 6, 21, 56, 126, 252, 462, &c. qui ſunt figurati quarti ordinis in genere primo; & qui inde oriuntur numeri 1, 9, 39, 119, 294, 630, 1218, &c. erunt figurati quarti ordinis generis quarti.

Atque hinc modò cognitâ ſummâ nu-

merorum, qui conſtituunt datum aliquem ordinem figuratorum in genere primo, facile etiam erit in quovis alio genere figuratorum ejuſdem ordinis ſummam invenire. Quum enim figurati, conſtituentes datum aliquem ordinem in omni alio genere, habeantur, ſi iis, qui ſunt ejuſdem ordinis in genere primo, addatur cyphra, ſive zero, iidemque toties accepti, quot unitates continet exponens generis quæſitorum figuratorum, unâ demptâ, addantur ordine ipſis figuratis, qui ſunt ejus ordinis in genere primo; perſpicuum eſt, ad inveniendam in quovis alio genere ſummam totidem figuratorum dati cujuſdam ordinis, quot deſignat numerus m, non aliud fieri debere, quàm in unum addere tot figuratos ejuſdem ordinis in genere primo, quot deſignat numerus $m - 1$, & ſummam iſtam toties acceptam, quot unitates continet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ, conjungere cum ſummâ, quæ oritur ex additione tot aliorum figuratorum, qui in genere primo eundem ordinem conſtituunt, quot deſignat ipſe numerus m.

Itaque, ſi de inveniendis ſummis figuratorum tertii ordinis quæſtio ſit, per ea, quæ

quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis tertii ordinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur multiplicando per ſe mutuò quinque iſtos numeros $m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4$, & dividendo productum per 120; atque ita quoque ſumma ex tot figuratis tertii ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m - 1$, habetur multiplicando per ſe mutuò quinque iſtos numeros $m - 1, m + 1, m, m + 2, m + 3$, & productum dividendo ſimiliter per 120. Quocirca invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum tertii ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad priorem quotientem addatur toties quotiens ſecundus, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ; hoc eſt ſemel, ſi figurati addendi ſint generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Similiter, ſi agatur de inveniendis ſummis figuratorum quarti ordinis, per ea, quæ ſuperiùs oſtenſa ſunt, ſumma ex tot figuratis quarti ordinis in genere primo, quot deſignat numerus m, habetur multiplicando per ſe mutuò ſex iſtos numeros $m, m + 1, m + 2, m + 3, m + 4, m + 5$,

 & di-

& dividendo productum per 720; atq; ita quoque ſumma ex tot figuratis quarti ordinis in eodem primo genere, quot deſignat $m - 1$, habetur multiplicando per ſe mutuò ſex iſtos numeros $m - 1$, m, $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$, $m + 4$, & productum dividendo ſimiliter per 720. Itaque invenietur in unoquoque alio genere ſumma tot figuratorum quarti ordinis, quot denotat numerus m, ſi ad quotientem ortum ex primâ diviſione addatur toties quotiens ortus ex diviſione ſecundâ, quot unitates habet exponens generis addendorum figuratorum, unâ demptâ.

Atque hic quoque, ſi omnes iſtæ ſummæ eo ordine diſponantur, quò ad ſua genera referuntur, patebit, eas miro quidem ordine progredi in infinitum, neque adeo neceſſe eſſe, expoſito artificio ſingulas invenire. Unde etiam poterit regula generalis excogitari pro inveniendâ in unoquoque genere ſummâ tot figuratorum dati alicujus ordinis, quot deſignat numerus m. Cæterùm, quia cognitâ ſummâ numerorum figurarotum, qui conſtituunt datum aliquem ordinem in genere primo, licuit nobis invenire ſummam figuratorum, qui conſtituunt eundem ordinem in quovis alio genere,

ob

ob hanc proprietatem, quod ſi iis, qui ſunt primi generis, præfigatur zero, ſive cyphra, iidemq; ordine adjungantur numeris, qui conſtituunt eundem figuratorum ordinem in omni alio genere, ii, qui inde oriuntur, ſint figurati ejuſdem ordinis generis ſubſequentis; proinde non abs re erit, proprietateem iſtam breviter hoc loco oſtenſam exhibre.

V.

Proprietas numerorum figuratorum ſuperiùs uſurpata demonſtratur.

AD demonſtrandam proprietatẽ, quæ deprehenditur in numeris figuratis, qui in ſingulis generibus unum eundemque ordinem conſtituunt; præmittendum eſt priùs hoc theorema, quod ſi fuerint quotcumque ſeries numerorum, eam proprietatem habentes, ut præfixâ cyphrâ iis, qui primam ſeriem cõſtituunt, iiſdemque additis ordine cum numeris cujuſcumque ſeriei, oriantur numeri ſeriei ſubſequentis, & ex collectione continuâ numerorum, ſeries illas conſtituentium, conficiantur totidem aliæ numerorum ſeries, quod inquam aliæ iſtæ ſeries,

eandem habean t proprietatem, ac primæ: adeo,ut ſi iis, qui ſunt primæ ſeriei, addatur cyphra, ſive zero, iidemque ordine addantur cum numeris cujuſque ſeriei, qui inde oriantur ſint numeri ſeriei ſubſequentis.

Sint igitur *a*, *b*, *c*, *d*, &c.; *a*, *e*, *f* *g*, &c., *a*, *h*, *i*, *k*, &c.; *a*, *l*, *m*, *n*, &c. ſeries aliquot numerorum, quæ eam habeant proprietatem, ut ſi iis, qui primam ſeriem conſtituunt, addatur cyphra, ſive zero, iidemque ordine adjungantur numeris cujuſcumque ſeriei, oriantur numeri ſeriei ſubſequentis. Dico, quod ſi ex collectione continuâ numerorum, ſeries illas conſtituentium, efficiantur totidem aliæ ſeries *a*, *o*, *p*, *q*, &c.; *a*, *r*, *ſ*, *t*, &c.; *a*, *u*, *x*, *y*, &c.; *a*, *z*, *&*, w, &c.; ſeries iſtæ eandem proprietatem habeant, ac primæ: ita nempe, ut ſi iis, qui conſtituunt primā ſeriem cyphra, ſive zero præfigatur, iidemque ordine addantur terminis alicujus ſeriei, oriantur exinde numeri, qui conſtituunt ſeriem ſubſequentem.

Quoniam enim primæ ſeries eam habent proprietatem, ut præfixâ cyphrâ iis, qui primam ſeriem conſtituunt, iiſdemque additis ordine cum numeris alicujus ſe-

ſeriei, oriantur numeri ſeriei ſubſequentis; proinde exiſtentibus terminis ſeriei primæ a, b, c, d, &c., fient termini ſeriei ſecundæ a, $a + b$, $b + c$, $c + d$, &c., termini ſeriei tertiæ a, $2a + b$, $2b + c$, $2c + d$, &c., termini ſeriei quartæ a, $3a + b$, $3b + c$, $3c + d$, &c., atque ita deinceps.

Et quoniam ſecundæ ſeries oriuntur ex collectione continuâ numerorum, ſeries primas conſtituentium; proindè prima ex ſecundis iſtis ſeriebus erit a, $a + b$, $a + b + c$, $a + b + c + d$, &c.; ſecunda a, $2a + b$, $2a + 2b + c$, $2a + 2b + 2c + d$; &c.; tertia a, $3a + b$, $3a + 3b + c$, $3a + 3b + 3c + d$, &c.; quarta a, $4a + b$, $4a + 4b + c$, $4a + 4b + 4c + d$, &c.; atque ita deinceps.

Jam deſignatis hac ratione ſecundis iſtis ſeriebus, liquet primos terminos ipſarum à ſe mutuò non differre, quum omnes per a deſignentur; ſed non item terminos alios, quum ſecundi differant à ſe mutuò per a, tertii per $a + b$, quarti per $a + b + c$, & ſic in infinitum: adeo nempe, ut oriatur ſemper terminus ſubſequens, ſi alicui ex ſecundis addatur a, alicui ex tertiis addatur $a + b$, alicui ex quartis addatur $a + b + c$, atque ita deinceps.

Unde modò facile eſt theorema propoſitum oſtendere. Nam, quum nulla ſit differentia inter primos terminos iſtarum ſerierum, inter alios verò ea intercedat, ut quiſque deficiat à ſubſequente per a in ſecundis, per $a + b$ in tertiis, per $a + b + c$ in quartis, atque ita deinceps; perſpicuum eſt, quod ſi termini iſti o, a, $a + b$, $a + b + c$, &c. addantur ordine terminis cujuſque ex iis ſeriebus oriantur termini ſeriei ſubſequentis.

Jam verò o, a, $a + b$, $a + b + c$, &c. ſunt termini, conſtituentes primam earum ſerierum, & habentes cyphram in principio. Itaque in ſecundis iis ſeriebus ea etiam proprietas locum habet, quod ſi iis, qui conſtituunt primam illarum, cyphra, ſive zero præfigatur, iidemque ordine addantur terminis cujuſque ex iiſdem ſeriebus, qui inde oriantur, ſint termini ſeriei ſubſequentis.

Oſtenſo hoc theoremate, haud difficile modò erit rationem reddere illius proprietatis, quæ deprehenditur in numeris, qui in ſigulis generibus eundem figuratorum ordinem conſtituunt: nempe quod ſi iis, qui datum aliquem ordinem conſtituunt in primo genere, addatur cyphra, ſeu zero, iidemque ordine adjungan-

gantur iis, qui eundem ordinem conſtituunt in quovis genere; qui inde oriantur, ſint numeri conſtituentes eundem adhuc figuratorum ordinem in genere ſubſequenti.

Nam primò numeri, qui in ſingulis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt, oriuntur ex continuâ collectione genitorum, qui ad ſua quæque genera referuntur. Jam verò numeri iſti genitores hanc habent proprietatem, ut ſi iis, qui ſunt primi generis, cyphra, ſeu zero præfigatur, iidemque ordine addantur genitoribus cujuſque generis, oriantur genitores generis ſubſequentis. Itaque per oſtenſum theorema hæc eadem proprietas obtinebit etiam in numeris, qui in ſingulis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt.

Et quoniam numeri, qui in ſingulis generibus conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum, oriuntur ex continuâ collectione eorum, qui in iiſdem generibus conſtituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa obtinet in iſtis, ita etiam locum habebit in iis. Unde porrò, quia numeri, qui conſtituunt in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, oriuntur ex collectione continuâ

nuâ eorum, qui in eodem genere conſtituunt ordinem ſecundum, obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis; atque ita gradatim in omnibus aliis figuratis, qui ſunt unius ejuſdemque ordinis, locum habere comperietur.

Cæterùm proprietatem illam competere omnibus numeris, quos figuratorum genitores appellamus, liquebit, ſi conſideremus genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continuâ collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c., genitores ſecundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continuâ binariorum, quibus unitas ſit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c., genitores tertii generis, tamquam incedentes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continuâ ternariorum, quibus ſimiliter unitas ſit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita deinceps.

Quum enim ſeries horum numerorum 1, 1, 1, 1, 1, &c., 1, 2, 2, 2, 2, &c., 1, 3, 3, 3, 3, &c. 1, 4, 4, 4, 4 &c., ex quibus genitores generum omnium continuâ collectione oriuntur, hujuſmodi ſint, ut inter primos

mos ipſarum terminos nulla ſit differentia, inter alios verò ea intercedat, ut ubique quiſque antecedens deficiat à ſubſequente per unitatem; perſpicuum eſt, in iis ſeriebus proprietatem illam locum habere: unde per oſtenſum theorema eadem proprietas obtinebit etiam in ſeriebus, quæ genitores generum omnium continent, quum per continuam collectionem iſtæ ex iis oriantur.

VI.

Qua ratione in omni genere ſeries tum genitorum, cùm figuratorum cujuſque ordinis reddi poſsint ſummabiles, oſtenditur.

QUemadmodum ſeries tam genitorum primi generis, quàm figuratorum ex iis prodeuntium, in infinitum continuatæ, numquam poſſunt finitas ſummas exhibere; ita quoque nec genitores aliorum generum, nec figurati, qui ex iis oriuntur, poſſunt unquam ſimul, in infinitum continuati, quantitatem finitam conſtituere. Sed nihilominus quemadmodum oſtenſum eſt ſuperiùs, priores ſeries evadere ſummabiles, ſi u-

tique

tique termini ipſarum dividantur ordine per terminos alterius ſeriei, qui geometricè creſcendo progrediuntur; ita quoque ſeries, tam genitorum aliorum generum, quàm figuratorum, qui ex iis ſubnaſcuntur, reddi poſſunt ſummabiles, ſi ſimiliter termini ipſarum dividantur ordine per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis.

Id autem dependet ex ipsâ illâ iſtorum numerorum proprietate, quam modò demonſtratam exhibuimus. Quod ut liquidò conſtet, oſtendemus id primum in numeris genitoribus. Itaque dividantur primò genitores ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova ſeries oriatur $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c. Et quoniam genitores ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. oriuntur, addendo genitores generis primi 0, 1, 2, 3, 4, &c. cyphram habentes in principio, ordine ipſis primi generis genitoribus 1, 2, 3, 4, 5, &c., componetur nova illa ſeries per additionem terminorum aliarum iſtarum ſerierum

Digitized by Google

$\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4} + \frac{5}{a^5}$, &c. Sed harum utraque ſeries eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$ altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$. Itaque ſummabilis erit etiam nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c., ejuſque ſumma finita erit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{1}{\overline{a-1}^2}$.

Dividatur ſecundò genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova ſeries habeatur $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$ &c. Et quoniam genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. oriuntur, ad-

&c., ejuſque ſumma finita erit æqualis

$$\frac{a}{\overline{a-1}^{2}} + \frac{3}{\overline{a-1}^{2}}.$$

Eodem artificio invenire licet ſummam finitam infinitorum terminorum cujuslibet alterius ſeriei, quæ oriatur dividendo genitores altiorum generum per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., nimirum componendo ſeriem illam ex duabus aliis ſeriebus, quarum una ſit conſtituta ex genitoribus primi generis cyphrâ habentibus in principio, altera ex genitoribus illius generis, quod præcedit genus, de cujus genitoribus agitur. Sed attentâ ratione, qua harum ſerierum ſummæ progrediuntur, poterit regula confici generalis, quæ ad omnes caſus ſe extendat: nimirum addendo ſemper ad $\frac{a}{\overline{a-1}^{2}}$ toties $\frac{1}{\overline{a-1}^{2}}$, quot unitates habet exponens generis datorum genitorum, unâ demptâ, hoc eſt nullies, ſi genitores fuerint primi generis; ſemel, ſi generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Oſten-

Oſtendamus id modò in numeris, qui in aliis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt. Quem in finem dividantur primò figurati, qui conſtituunt primum ordinem in genere ſecundo, 1, 4, 9, 16, 25, &c. per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c., ita ut nova habeatur ſeries $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{16}{a^4} + \frac{25}{a^5}$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere ſecundo oriuntur, addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10, &c., cyphram habentes in principio, ordine ipſis nnmeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui primum figuratorum ordinem in primo genere conſtituunt; componetur nova illa ſeries ex additione terminorũ aliarum iſtarum ſerierũ $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{6}{a^4} + \frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{15}{a^5}$ &c. Sed harum ſerierũ utraq; eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$;

Unde modò facile eſt theorema propoſitum oſtendere. Nam, quum nulla ſit differentia inter primos terminos iſtarum ſerierum, inter alios verò ea intercedat, ut quiſque deficiat à ſubſequente per a in ſecundis, per $a + b$ in tertiis, per $a + b + c$ in quartis, atque ita deinceps; perſpicuum eſt, quod ſi termini iſti o, a, $a + b$, $a + b + c$, &c. addantur ordine terminis cujuſque ex iis ſeriebus oriantur termini ſeriei ſubſequentis.

Jam verò o, a, $a + b$, $a + b + c$, &c. ſunt termini, conſtituentes primam earum ſerierum, & habentes cyphram in principio. Itaque in ſecundis iis ſeriebus ea etiam proprietas locum habet, quod ſi iis, qui conſtituunt primam illarum, cyphra, ſive zero præfigatur, iidemque ordine addantur terminis cujuſque ex iiſdem ſeriebus, qui inde oriantur, ſint termini ſeriei ſubſequentis.

Oſtenſo hoc theoremate, haud difficile modò erit rationem reddere illius proprietatis, quæ deprehenditur in numeris, qui in ſigulis generibus eundem figuratorum ordinem conſtituunt: nempe quod ſi iis, qui datum aliquem ordinem conſtituunt in primo genere, addatur cyphra, ſeu zero, iidemque ordine adjungan-

gan-

Digitized by Google

gantur iis, qui eundem ordinem conſtituunt in quovis genere; qui inde oriantur, ſint numeri conſtituentes eundem adhuc figuratorum ordinem in genere ſubſequenti.

Nam primò numeri, qui in ſingulis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt, oriuntur ex continuâ collectione genitorum, qui ad ſua quæque genera referuntur. Jam verò numeri iſti genitores hanc habent proprietatem, ut ſi iis, qui ſunt primi generis, cyphra, ſeu zero præfigatur, iidemque ordine addantur genitoribus cujuſque generis, oriantur genitores generis ſubſequentis. Itaque per oſtenſum theorema hæc eadem proprietas obtinebit etiam in numeris, qui in ſingulis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt.

Et quoniam numeri, qui in ſingulis generibus conſtituunt ſecundum ordinem figuratorum, oriuntur ex continuâ collectione eorum, qui in iiſdem generibus conſtituunt ordinem primum; quemadmodum proprietas illa obtinet in iſtis, ita etiam locum habebit in iis. Unde porrò, quia numeri, qui conſtituunt in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, oriuntur ex collectione continuâ

nuâ eorum, qui in eodem genere conſtituunt ordinem ſecundum, obtinebit quoque eadem proprietas in figuratis tertii ordinis; atque ita gradatim in omnibus aliis figuratis, qui ſunt unius ejuſdemque ordinis, locum habere comperietur.

Cæterùm proprietatem illam competere omnibus numeris, quos figuratorum genitores appellamus, liquebit, ſi conſideremus genitores primi generis, utpote progredientes ab unitate per unitatis intervallum, oriri ex continuâ collectione unitatum 1, 1, 1, 1, 1, &c., genitores ſecundi generis, veluti progredientes ab unitate per intervallum binarii, oriri ex additione continuâ binariorum, quibus unitas ſit præfixa, 1, 2, 2, 2, 2, &c., genitores tertii generis, tamquam incedentes ab unitate per intervallum ternarii, oriri ex collectione continuâ ternariorum, quibus ſimiliter unitas ſit præfixa, 1, 3, 3, 3, 3, &c.; atque ita deinceps.

Quum enim ſeries horum numerorum 1,1,1,1,1,&c., 1,2,2,2,2,&c., 1,3,3,3,3, &c. 1, 4, 4, 4, 4 &c., ex quibus genitores generum omnium continuâ collectione oriuntur, hujuſmodi ſint, ut inter primos

mos ipſarum terminos nulla ſit differentia, inter alios verò ea intercedat, ut ubique quiſque antecedens deficiat à ſubſequente per unitatem; perſpicuum eſt, in iis ſeriebus proprietatem illam locum habere: unde per oſtenſum theorema eadem proprietas obtinebit etiam in ſeriebus, quæ genitores generum omnium continent, quum per continuam collectionem iſtæ ex iis oriantur.

VI.

Qua ratione in omni genere ſeries tum genitorum, cùm figuratorum cujuſque ordinis reddi poſſint ſummabiles, oſtenditur.

Quemadmodum ſeries tam genitorum primi generis, quàm figuratorum ex iis prodeuntium, in infinitum continuatæ, numquam poſſunt finitas ſummas exhibere; ita quoque nec genitores aliorum generum, nec figurati, qui ex iis oriuntur, poſſunt unquam ſimul, in infinitum continuati, quantitatem finitam conſtituere. Sed nihilominus quemadmodum oſtenſum eſt ſuperiùs, priores ſeries evadere ſummabiles, ſi utique

tique termini ipſarum dividantur ordine per terminos alterius ſeriei, qui geometricè creſcendo progrediuntur; ita quoque ſeries, tam genitorum aliorum generum, quàm figuratorum, qui ex iis ſubnaſcuntur, reddi poſſunt ſummabiles, ſi ſimiliter termini ipſarum dividantur ordine per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis.

Id autem dependet ex ipſâ illâ iſtorum numerorum proprietate, quam modò demonſtratam exhibuimus. Quod ut liquidò conſtet, oſtendemus id primum in numeris genitoribus. Itaque dividantur primò genitores ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova ſeries oriatur $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c. Et quoniam genitores ſecundi generis 1, 3, 5, 7, 9, &c. oriuntur, addendo genitores generis primi 0, 1, 2, 3, 4, &c. cyphram habentes in principio, ordine ipſis primi generis genitoribus 1, 2, 3, 4, 5, &c., componetur nova illa ſeries per additionem terminorum aliarum iſtarum ſerierum

$\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{4}{a^4} + \frac{5}{a^5}$, &c. Sed harum utraque ſeries eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$ altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$. Itaque ſummabilis erit etiam nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c., ejuſque ſumma finita erit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$ $+ \frac{1}{\overline{a-1}^2}$.

Dividātur ſecundò genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova ſeries habeatur $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$ &c. Et quoniam genitores tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c. oriuntur, ad-

addendo genitores generis primi $0, 1, 2, 3, 4$, &c. cyphram habentes in principio ordine genitoribus ſecundi generis $1, 3, 5, 7, 9$, &c.; componetur nova illa ſeries per additionem terminorum aliarum iſtarum ſerierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{5}{a^3} + \frac{7}{a^4} + \frac{9}{a^5}$ &c. Jam verò utraque iſtarum ſerierum eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$, altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{1}{\overline{a-1}^2}$. Quare ſummabilis erit etiam nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$ &c., ejuſque ſumma finita erit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{2}{\overline{a-1}^2}$.

Dividantur tertiò genitores quarti generis $1, 5, 9, 13, 17$, &c. per terminos ejuſdem adhuc progreſſionis geometricæ cre-

creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova ſeries conſtituatur $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{13}{a^4} + \frac{17}{a^5}$ &c. Et ſimiliter, quia genitores quarti generis 1, 5, 9, 13, 17, &c. oriuntur addendo genitores generis primi 0, 1, 2, 3, 4, &c. cyphram habentes in principio ordine genitoribus tertii generis 1, 4, 7, 10, 13, &c.; componetur nova illa ſeries per additionem terminorum aliarum iſtarum ſerierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^3} + \frac{3}{a^4} + \frac{4}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{7}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{13}{a^5}$, &c. Sed harum ſerierum utraque eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$, altera æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{2}{\overline{a-1}^2}$. Itaque ſummabilis erit etiam nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{13}{a^4} + \frac{17}{a^5}$, &c.,

&c., ejuſque ſumma finita erit æqualis

$$\frac{a}{\overline{a-1}^2} + \frac{3}{\overline{a-1}^2}.$$

Eodem artificio invenire licet ſummam finitam infinitorum terminorum cujuslibet alterius ſeriei, quæ oriatur dividendo genitores altiorum generum per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., nimirum componendo ſeriem illam ex duabus aliis ſeriebus, quarum una ſit conſtituta ex genitoribus primi generis cyphrâ habentibus in principio, altera ex genitoribus illius generis, quod præcedit genus, de cujus genitoribus agitur. Sed attentâ ratione, qua harum ſerierum ſummæ progrediuntur, poterit regula confici generalis, quæ ad omnes caſus ſe extendat: nimirum addendo ſemper ad $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$ toties $\frac{1}{\overline{a-1}^2}$, quot unitates habet exponens generis datorum genitorum, unâ demptâ, hoc eſt nullies, ſi genitores fuerint primi generis; ſemel, ſi generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; ter, ſi generis quarti; atque ita deinceps.

Oſten-

Oſtendamus id modò in numeris, qui in aliis generibus primum figuratorum ordinem conſtituunt. Quem in finem dividantur primò figurati, qui conſtituunt primum ordinem in genere ſecundo, 1, 4, 9, 16, 25, &c. per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c., ita ut nova habeatur ſeries $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{16}{a^4} + \frac{25}{a^5}$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere ſecundo oriuntur, addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10, &c., cyphram habentes in principio, ordine ipſis numeris 1, 3, 6, 10, 15, &c., qui primum figuratorum ordinem in primo genere conſtituunt; componetur nova illa ſeries ex additione terminorũ aliarum iſtarum ſerierũ $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{6}{a^4} + \frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{3}{a^2} + \frac{6}{a^3} + \frac{10}{a^4} + \frac{15}{a^5}$ &c. Sed harum ſerierũ utraq; eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$;

ſecunda verò æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}$. Itaque prodibit etiam ſummabilis nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{16}{a^4} + \frac{25}{a^5}$ &c., ejuſque ſumma finita erit $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{a}{\overline{a-1}^3}$.

Dividantur deinde numeri 1, 5, 12, 22, 35, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in genere tertio, per terminos ejuſdem progreſſionis geometricæ a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova conſtituatur ſeries $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{12}{a^3} + \frac{22}{a^4} + \frac{35}{a^5}$ &c. Et quoniam figurati primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c. oriuntur addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10, &c., cyphram habentes in principio, ordine numeris 1, 4, 9, 16, 25, &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in genere ſecundo; componetur nova illa ſeries ex additione termi-

no-

norum aliarum iſtarũ ſerierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{6}{a^4} + \frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^3} + \frac{16}{a^4} + \frac{25}{a^5}$ &c. Jam verò iſtarũ utraq; ſeries eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^2}$, altera verò æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{a}{\overline{a-1}^3}$. Quare ſummabilis erit etiam nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{12}{a^3} + \frac{22}{a^4} + \frac{35}{a^5}$ &c., ejuſque ſumma finita erit $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{2a}{\overline{a-1}^3}$.

Dividantur porrò numeri 1, 6, 15, 28, 45 &c., qui conſtituunt primum ordinem figuratorum in genere quarto, per terminos ejuſdem adhuc progreſſionis geometricæ a, a^2, a^3, a^4, a^5, &c., ita ut nova habeatur ſeries $\frac{1}{a} + \frac{6}{a^2} + \frac{15}{a^3} +$

$\frac{28}{a^4} + \frac{35}{a^5}$ &c. Et ſimiliter, quia figurati primi ordinis in genere quarto oriuntur, addendo eos, qui ſunt primi ordinis in genere primo, 0, 1, 3, 6, 10 &c., & cyphram habent in principio, ordine figuratis primi ordinis in genere tertio 1, 5, 12, 22, 35, &c.; componetur nova illa ſeries ex additione terminorum aliarum iſtarum ſerierum $\frac{0}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{3}{a^3} + \frac{6}{a^4} + \frac{10}{a^5}$ &c., & $\frac{1}{a} + \frac{5}{a^2} + \frac{12}{a^3} + \frac{22}{a^4} + \frac{35}{a^5}$ &c. Sed harum ſerierum utraque eſt ſummabilis, quum prima ſit æqualis $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$, altera æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{2a}{\overline{a-1}^3}$. Quare ſummabilis erit etiam nova illa ſeries $\frac{1}{a} + \frac{6}{a^2} + \frac{15}{a^3} + \frac{28}{a^4} + \frac{45}{a^5}$ &c., ejuſque ſumma finita erit æqualis $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3} + \frac{3a}{\overline{a-1}^3}$.

Eâ-

Eâdem methodo progredi licebit in infinitum; ſummaſque finitas determinare infinitorum terminorum cujuslibet alterius ſeriei, quæ oriatur dividendo figuratos, conſtituentes primum ordinem in altioribus generibus, per terminos progreſſionis geometricæ creſcentis a, a^2, a^3, a^4, a^5 &c.: nimirum componendo ſeriem illam ex duabus aliis ſeriebus, quarum una ſit conſtituta ex figuratis primi ordinis in genere primo, cyphram habentibus in principio, altera ex figuratis conſtituentibus primum ordinem in illo genere, quod præcedit genus, de quo agitur. Sed conſideratâ ſimiliter ratione, qua harum ſerierum ſummæ progrediuntur, poterit hìc quoque regula confici generalis, quæ ad omnes caſus ſe extendat, nimirum addendo ſemper ad $\frac{a^2}{\overline{a-1}^3}$ toties $\frac{a}{\overline{a-1}^3}$, quot unitates habet exponens generis datorum figuratorum, unâ demptâ; hoc eſt nullies, ſi fuerint primi generis; ſemel, ſi generis ſecundi; bis, ſi generis tertii; atque ita deinceps.

Non diſſimiliter res oſtendetur in nu-

meris, qui in ſingulis generibus datum quemcumque alium figuratorum ordinem conſtituunt, & pro unoquoque ordine poterit ſemper regula generalis conſici, quæ ad omnes caſus ſe extendat. Ita ſi agatur de numeris, qui in unoquoque genere conſtituunt ſecundum figuratorum ordinem, ſatis erit ad $\frac{a^3}{\overline{a-1}^4}$ addere toties $\frac{a^2}{\overline{a-1}^4}$, quot unitates habet exponens generis figuratorum, unâ demptâ. Quod ſi verò quæſtio ſit de numeris conſtituentibus in unoquoque genere tertium figuratorum ordinem, non aliud fieri debet, quàm ad $\frac{a^4}{\overline{a-1}^5}$ addere toties $\frac{a^3}{\overline{a-1}^5}$, quot ſunt unitates in exponente generis figuratorum, demptâ priùs unâ. Atque ita quoque in numeris, conſtituentibus in ſingulis generibus quartum ordinem figuratorum, ſatis erit ad $\frac{a^5}{\overline{a-1}^6}$ addere toties $\frac{a^4}{\overline{a-1}^6}$, quoties il-

illud deſignat exponens generis figuratorum, unitate unâ minutus; & ſic deinceps in infinitum.

Quin etiam in hac re confici poterit regula adeo generalis, quæ in ſingulis generibus ſe extendat ad omnem quemcumque figuratorum ordinem. Nam vocando *m* exponentem, qui refertur ad datum ordinem figuratorum, ſatis erit ad

$$\frac{a^{m+a}}{\overline{a-1}^{m+2}} \text{ toties addere } \frac{a^{m}}{\overline{a-1}^{m+2}},$$

quot unitates habet exponens generis figuratorum, unâ demptâ. Atque hæc regula valet etiam in ipſis genitoribus, ex quibus ordines figuratorum per continuam additionem oriuntur, ſcilicet ſi ii genitores ita inter figuratorum ordines reponantur, ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihil.

VII.

De ſeriebus infinitis, quæ oriuntur ex inverſione omnium cujuſcumque generis, & ordinis figuratorum.

IN numeris illis, qui figuratorum ordines in primo genere conſtituunt,

 hanc

hanc aliam proprietatem ſuperiùs demonſtratam exhibuimus, nimirum, quod etſi ſumma ipſorum, cujuſque ſint ordinis, ſit infinita, attamen ſi invertantur, & fiant denominatores fractionum, quarum unaquæque unitatem habeat pro ſuo numeratore, iidem ſimul collecti ſummam exhibeant finitam; remque tradidimus hoc theoremate generali, quod in numeris figuratis primi generis, ſi ii, qui datum aliquem ordinem conſtituunt, invertantur, ſumma omnium terminorum, qui primum excipiunt, eam unitatis partem adæquet, quam deſignat exponens ordinis numerorum: quod equidem theorema locum etiam habere demonſtravimus in numeris naturalibus, qui ſunt genitores eorum figuratorum, nimirum collocando eos taliter inter ordines figuratorum, ut exponens ordinis ipſorum ſit zero, ſive nihilum.

Itaque figurati primi generis, cujuſcumque ii ſunt ordinis, reddi poſſunt ſummabiles, non modò ſi dividantur ordine per terminos alicujus progreſſionis geometricæ creſcentis, verùm etiam ſi invertantur, & denominatores fiant fractionum, quarum quælibet habeat pro ſuo numeratore unitatem. Jam poſtquam no-

novimus figuratos aliorum generum reddi pariter ſummabiles, quotieſcumque dividuntur ordine per terminos,qui conſtituunt progreſſionem geometricam creſcentem; cæpimus etiam ſuſpicari, eoſdem aliorum generum figuratos poſſe item ſummabiles reddi, ſi invertantur, & denominatores fiant fractionum, pro numeratore unitatem habentium: eoque magis, quod termini ſerierum, quæ conſtituuntur per inverſionem figuratorum aliorum generum, collati ſigillatim cum terminis ſerierum, quæ efformantur per inverſionem figuratorum primi generis, iiſdem manifeſto ſint majores.

Verum rei periculo inſtituto, variiſque methodis tentatis, numquam id aſſequi potuimus. Neque enim licuit nobis earum ſerierum finitas ſummas invenire, per ſubductionem alicuius ſeriei, uno, alterove termino mutilatæ, à ſe ipsâ integrâ; multoque minus reſolvendo eas in alias ſeries infinitas, quæ eſſent ſummabiles. In ſubſidium etiam accerſivimus proprietatem illam mox oſtenſam, per quam figurati aliorum generum ex figuratis generis primi derivantur; ſed nihil juvit: nam in hoc caſu figurati aliorum generum ſunt denominatores fra-

ctio-

ctionum ; nec proinde ex figuratis primi generis derivari poſſunt eâ ratione,quemadmodum derivantur, quum ſunt fractionum numeratores. Quocirca poſt varia ſcrutinia in eam nos adduximus ſententiam, ut tametſi ſummæ ſerierum, quæ conſtituuntur per inverſionem figuratorum aliorum generum, ſint finitæ; eæ tamen humanâ induſtriâ nequaquam poſſint determinari.

Id novit etiam Vir ſummus Jacobus Bernoullius, ſed in uno tantùm caſu ſpeciali, nimirum in ſerie infinitâ $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$, &c.,quæ conſtituitur per inverſionem quadratorum numerorum naturalium, qui ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo ; nam in ſuo de ſeriebus infinitis tractatu ingenuè fatetur, perveſtigationem finitæ ſummæ illius ſeriei difficiliorem eſſe, quàm quis expectaverit, quin etiam omnino induſtriam ſuam eluſiſſe. Interim etſi Vir Clariſſimus determinare nequiverit finitam ſummam ſeriei, quæ oritur ex inverſione quadratorum numerorum naturalium, exhibuit tamen rationem, quam ſum-

ſumma ex terminis omnibus locorum imparium habet ad ſummam ex terminis omnibus in locis paribus exiſtentibus, oſtendendo eam eſſe, ut 3 ad 1. Unde diſcimus priores terminos ſimul conſtituere tres quartas partes totius ſeriei, poſteriores verò tantùm partem unam.

Sed non abs re erit, hìc paucis innuere artificium, quo mediante laudatus Auctor novit rationem, quam in ſerie illa ſpeciali ſumma terminorum omnium in locis imparibus habet ad ſummam terminorum omnium in locis paribus. Itaque notare priùs oportet, quod ſicuti conſtitutis infinitis ſeriebus geometricis, quæ incipientes à numeris imparibus inverſis progrediantur in ratione ſubduplâ, eæ comprehendunt numeros omnes naturales inverſos; ita quoque ſi conſtituantur infinitæ ſeries geometricæ, quæ incipientes à quadratis numerorum imparium inverſis incedant in ratione ſubquadruplâ; eæ contineant quadratos omnes inverſos numerorum naturalium: ex quo fit, ut ipſa ſeries quadratorum omnium inverſorum $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49}$ &c. in omnes illas ſeries geome-

metricas reſolvi queat.

Jam, quum termini illarum ſerierum geometricarum progrediantur in ratione ſubquadruplâ, unaquæque ex iis ſummabilis erit, & cujuſque ſumma finita erit æqualis priori ſuo termino unà cum tertia parte ejuſdem. Itaque, quum priores termini omnium illarum ſerierum ſint quadrati inverſi numerorum imparium, erunt ſummæ omnium ſimul æquales huic ſeriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}$ &c. unà cum tertia parte ipſius. Sed ſummæ omnium illarum ſerierum dant ſummam ſeriei, de qua agitur, $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64}$ &c. Igitur tota iſta ſeries æqualis erit ſeriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81}$ &c. unà cum ejus tertia parte; & propterea, quum differentia utriuſque ſeriei $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64}$ &c. adæquet ter-

tiam

etiam partem iſtius $\frac{1}{1} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} +$ &c., erit ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam terminorum in locis paribus, ut 3 ad 1.

Nolim autem credatis eandem rationem, quam habet ſumma terminorum omnium in locis imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, determinari quoque poſſe in ſeriebus, quæ conſtituuntur per inverſionem aliorum numerorum figuratorum; nam licuit Viro Clariſſimo eam determinare in ſerie iſtâ ſpeciali $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} +$ &c. non jam quia numeri 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, &c., ex quorum inverſione ſeries illa oritur, ſunt figurati primi ordinis in genere ſecundo, ſed quia ſunt quadrati numerorum naturalium. Quippe ſciatis hoc loco velim, id generale eſſe in omnibus poteſtatibus numerorum naturalium, ut ſiquidem ex earum inverſione totidem ſeries infinitæ conſtituantur, ratio, quam in iis habet ſumma terminorum omnium in locis im-

imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, ſemper poſſit determinari; quum ſit, ut poteſtas non diſſimilis binarii unitate multata ad ipſam unitatem; hoc eſt in quadratis, ut 3 ad 1; in cubis, ut 7 ad 1; in quadrato-quadratis, ut 15 ad 1; atque ita deinceps.

Demonſtratur id verò in aliis poteſtatibus, eadem omnino ratione, qua oſtenſum eſt in quadratis: nimirum reſolvendo ſeriem, de qua agitur, in infinitas alias, quarum termini à poteſtatibus numerorum imparium inverſis in eâ ratione decreſcant, quam deſignat poteſtas non diſſimilis binarii; hoc eſt in ratione octuplâ, ſi agatur de cubis; in ratione ſexdecuplâ, ſi agatur de quadrato-quadratis; atque ita deinceps. Quum enim omnes iſtæ ſeries ſint ſummabiles, & cujuſque ſumma finita adæquet priorem ſuum terminum unà cum eâ ejuſdem parte, quam denominat prædicta poteſtas binarii, unitate unâ multata; fiet tota ſeries, de qua agitur, æqualis ſeriei, quæ oritur ex poteſtatibus inverſis numerorum imparium, unà cum eâ ejuſdem ſeriei parte, quam poteſtas binarii unitate multatâ deſignat; proptereaque ſubducendo ſeriem iſtam ex illâ; fiet ſum-

ſumma terminorum omnium in locis imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus, ut eſt poteſtas binarii unitate multata ad ipſam unitatem.

Eadem autem determinatio locum etiam ſibi vindicat in ipſis numeris naturalibus inverſis, qui ſunt primæ ipſorum poteſtates, eritque ſumma numerorum imparium ad ſummam numerorum parium, ut prima poteſtas binarii unitate multatâ ad unitatem, hoc eſt in ratione æqualitatis, quemadmodum jam ſupra demonſtravimus, quum de ſerie harmonicâ quæſtio erat. Sed obtinet quoque eadem determinatio in poteſtatibus numerorum naturalium imperfectis, quæ numeros fractos pro ſuis exponentibus habent; qua ratione in iſtâ ſerie $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} +$ &c. ſumma terminorum in locis imparibus eſt ad ſummam terminorum in locis paribus, ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1; pariterque in hac aliâ ſerie

$$\frac{1}{\sqrt[3]{1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} +$$

—

$\frac{1}{\sqrt[3]{6}} + \frac{1}{\sqrt[3]{7}}$ &c. ſumma ex terminis locorum imparium eſt ad ſummam ex terminis locorum parium, ut $\sqrt[3]{2} - 1$ ad 1.

Horum omnium demonſtrationes contrahi eleganter poſſunt, ſi ex unoquoque termino ſeriei, de qua agitur, ea pars capiatur, quam binarii poteſtas non diſſimilis oſtēdit. Sic enim nova oritur ſeries, quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus exiſtunt. Unde, quum prior ſeries ſit ad hanc aliam, ut poteſtas binarii, ſimilis iis, ex quarum inverſione oritur ſeries, de qua agitur, ad unitatem; erit dividendo, ut ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam terminorum in locis paribus, ita eadem poteſtas binarii unitate multatâ ad unitatem.

Hac ratione, ſi fiat ſeries ex ipſis numeris naturalibus inverſis, qui ſunt primæ ipſorum poteſtates $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$ &c., capiendo ex unoquoque ejus termino eam partem,

tem, quam deſignat prima poteſtes binarii, hoc eſt ipſe binarius, orietur hæc altera $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+$ &c., quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus exiſtunt. Unde, quia prior ſeries $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+$ &c. eſt ad hanc aliam $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+$ &c., ut 2 ad 1, erit dividendo, ut $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+$ &c. ad $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+$ &c., hoc eſt, ut ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam terminorum in locis paribus, ita 1 ad 1.

Similiter, ſi fiat ſeries ex quadratis inverſis numerorum naturalium $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+$

$+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c., capiendo ex unoquoque ejus termino eam partem, quam deſignat quadratum binarii, orietur hæc altera $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{100}+$ &c., quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus exiſtunt. Itaque, quum prior ſeries $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+$ &c. ſit ad hanc aliam $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{100}+$ &c., ut 4 ad 1; erit dividendo, ut $\frac{1}{1}+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+$ &c. ad $\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}+\frac{1}{100}+$ &c., hoc eſt, ut ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam termi-

minorum in locis paribus, ita 3 ad 1.

Atque ita quoque, ſi fiat ſeries ex radicibus quadratis numerorum naturalium inverſis $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$ &c., ſumendo ex unoquoque termino ejus eam partem, quam deſignat quadrata radix binarii, orietur hæc alia ſeries $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c., quæ continet eos tantùm terminos prioris, qui in locis paribus exiſtunt. Quocirca, quum prior ſeries $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$ &c. ſit ad hanc aliam $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c., ut $\sqrt{2}$ ad 1; erit dividendo, ut $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$ &c. ad $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} +$

$\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}} +$ &c., hoc eſt, ut ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam terminorum in locis paribus, ita $\sqrt{2} - 1$ ad 1.

Et generaliter, ſi fiat ſeries ex iis poteſtatibus inverſis numerorum naturalium, quæ habent pro ſuo exponente numerum m, $\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m} +$ &c., capiendo ex unoquoque termino ejus eam partem, quam deſignat 2^m, hoc eſt poteſtas non diſſimilis binarii, orietur hæc alia ſeries $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{8^m} + \frac{1}{10^m} + \frac{1}{12^m} +$ &c., quæ eos tantùm prioris terminos continet, qui in locis paribus exiſtunt. Unde, quia prior ſeries $\frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{5^m} + \frac{1}{6^m} + \frac{1}{7^m} + \frac{1}{8^m}$ &c. eſt ad hanc aliam $\frac{1}{2^m} + \frac{1}{4^m} + \frac{1}{6^m} +$

$\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}$ &c., ut 2^m ad 1, erit divi-dendo, ut $\frac{1}{1^m}+\frac{1}{3^m}+\frac{1}{5^m}+\frac{1}{7^m}+\frac{1}{9^m}+\frac{1}{11^m}$ &c. ad $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{4^m}+\frac{1}{6^m}+\frac{1}{8^m}+\frac{1}{10^m}+\frac{1}{12^m}$ &c., hoc eſt, ut ſumma terminorum in locis imparibus ad ſummam terminorum in locis paribus, ita 2^m ad 1.

VIII.

Paradoxum, quod ex doctrinâ praecedenti articulo traditâ, ſequitur, enodatur.

IN ſeriebus Infinitis multa occurrunt paradoxa, quæ ob infiniti naturam non ita facile ab intellectu noſtro finito videntur poſſe comprehendi. Inſigne, & notatu dignum hìc nobis ſubnaſcitur ex determinatâ ratione, quam in ſeriebus infinitis, ortis ex poteſtatibus inverſis numerorum naturalium, habet ſumma terminorum omnium in locis imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus. Oſtenſum eſt enim determinationem illam obtinere etiam, ſi nu-

merorum naturalium poteſtates imperfectæ invertantur, atque ita in ſerie iſtâ

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}}$$

$+ \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}}$ &c. ſummam ex terminis locorum imparium eſſe ad ſummam ex terminis locorum parium, ut $\sqrt{2} - 1$ ad 1. Hoc autem illud eſt, quod paradoxum ſapere videtur. Ratio enim, quam habet $\sqrt{2} - 1$ ad 1, eſt minoris ad majus, & tamen termini locorum imparium collati ſigillatim cum terminis locorum parium, iiſdem manifeſtò ſunt majores.

Hujuſmodi paradoxum novit primus omnium Jacobus Bernoullius, qui etſi ejus rationem, ut ipſe ait, ſatis perſpectam habuiſſet, illam tamen minimè dignatus eſt erudito orbi impertiri. Idem autem paradoxum deprehenditur generaliter in omnibus iis poteſtatibus numerorum naturalium, quæ inverſæ dant ſeriem, cujus ſumma eſt infinita, quales equidem ſunt illæ omnes, quæ exponentes habent, non majores unitate. Atque ita non modò illud cernere licet in iis poteſtatibus, quarum exponentes ſunt

uni-

unitate minores, verùm etiam in ipſis numeris naturalibus, qui ſunt primæ ipſorum poteſtates, unitatem habentes pro exponente, & ex quorum inverſione ſeries conſtituitur, cujus ſumma eſt infinita. Nam in ſerie harmonicâ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}$ &c. ſumma terminorum omnium in locis imparibus ad ſummam terminorum omnium in locis paribus rationem habet æqualitatis, & tamen ii cum iſtis ſigillatim collati manifeſtò majores deprehenduntur.

Quum primum in idem paradoxum ego etiam inciderim, ejus ſolutio ſummoperè me torſit, & ingenuè fateor plures impendiſſe dies, nec interea temporis aliquid mihi in mentem veniſſe, quod rei ſatisfaceret. Sed ejus rationem ſtatim novi, poſtquam intellexi demonſtrationes eorum omniū eleganter contrahi poſſe, ſi ex unoquoque termino ſeriei, de qua agitur, ea pars capiatur, quam binarii poteſtas non diſſimilis oſtendit. Quum enim ſeries, quæ hac ratione oritur, conti-

tineat eos tantùm terminos prioris, quì in locis paribus exiſtunt; conjicere mihi licuit, quod etſi termini locorum parium inter terminos locorum imparium contineantur, non hinc tamen putandum ſit numerum illorum, iſtorum numerorum adæquare, quum illi ſigillatim correſpondeant omnibus ſeriei, de qua agitur, terminis, quæ ſimul comprehendit tam terminos locorum parium, quàm terminos locorum imparium.

Hoc autem cognito, facile deinde mihi fuit rationem reddere, quo pacto fieri poſſet, ut ſeries $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$ &c. ad ſeriem $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{14}}$ &c. rationem habeat minoris ad majus, hoc eſt eandem, quam habet $\sqrt{2} - 1$ ad 1, quum tamen termini illius ſigillatim comparati cum terminis iſtius, iiſdem manifeſtò majores deprehendantur. Nam ſemper ac in ſe-

cun-

cundâ ſerie $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c. termini correſpondeant, non quidem terminis primæ ſeriei $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}}$ &c., ſed terminis ſeriei principalis, quæ utramque ſimul comprehendit, $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{8}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{12}}$ &c. ; fit hinc, ut in collatione earum ſerierum termini non ſinguli ſingulis, ſed eâ quidem ratione inter ſe mutuò ſint comparandi, ut poſtquam inſtituta ſit comparatio inter primum terminum unus, & primum alterius, debeat ſemper unus prioris ſeriei cum duobus alterius conferri. Qua ratione liquidò patebit, quod tametſi termini prioris ſeriei ſigillatim comparati cum terminis ſecundæ, iiſdem ſint majores, attamen tota ſumma illorum æſtimanda ſit minor ſummâ iſtorum; quia nempe ablatis ex utrâque ſerie prio-

prioribus terminis, reliqui ita ſibi mutuò correſpondent, ut unus ſeriei prioris, duos ſecundæ ſemper abſorbeat.

Quotieſcumque enim ablatis ex utrâque ſerie terminis prioribus, reliqui ita inter ſe mutuò conferuntur, ut quiſque primæ ſeriei duobus ſecundæ correſpondeat; patet, ſingulos primæ ſeriei terminos, excepto primo, minores eſſe terminis, quibus correſpondent in ſecundâ. Quod ut generaliter oſtendamus, perſpicuum eſt, quod ſi in primâ ſerie quilibet terminus repræſentetur per $\frac{1}{\sqrt{a}}$, duo, quibus ille in ſecundâ correſpondet, ſint $\frac{1}{\sqrt{2a}-2}$, & $\frac{1}{\sqrt{2a}}$. Jam verò $\frac{1}{\sqrt{a}}$ minor eſt duobus iſtis ſimul ſumptis, quum reductis ad eandem denominationem, ille fiat $\frac{\sqrt{4a}-4}{\sqrt{4a^2-4a}}$, iſti verò evadant $\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{4a^2-4a}}$ $\frac{\sqrt{2a}-2}{\sqrt{4a^2-4a}}$, & ratio, quam habet il-

le

le ad ſummam iſtorum, eſt ut $\sqrt{4a}-4$ ad $\sqrt{2a+\sqrt{2a}}-2$, hoc eſt minoris ad majus. Itaque ſinguli primæ ſeriei termini, excepto primo, minores ſunt terminis, quibus correſpondent in ſecundâ; atque adeò ſumma ex terminis primæ æſtimanda eſt minor ſumma ex terminis ſecundæ.

Eâdem ratione ſolvetur paradoxum, de quo agitur, in omni alio caſu. Nam ex terminis ſeriei principalis conſtitutis duabus ſeriebus, quarum altera contineat terminos locorum imparium, altera terminos locorum parium; patebit ſemper ſingulos primæ ſeriei terminos, excepto primo, minores eſſe terminis, quibus in ſecundâ correſpondent. Sic in numeris naturalibus inverſis, ubi idem paradoxum etiam deprehenditur, ſi quiſque terminus locorum imparium repræſentetur per $\frac{1}{a}$, duo, quibus ille correſpondet inter terminos locorum parium, erunt $\frac{1}{2a-2}$, & $\frac{1}{2a}$. Unde, quia reductis ad eandem denominationem, ille fit

4a

$\frac{4a-4}{4a^2-4a}$, iſti verò $\frac{2a}{4a^2-4a}$, & $\frac{2a-2}{2a^2-4a}$, erit ille ad duos iſtos ſimul ſumptos, ut $4a-4$ ad $4a-2$, hoc eſt in ratione minoris ad majus: & propterea in ſerie harmonicâ quiſque ex terminis locorum imparium, excepto primo, minor erit iis, quibus correſpondet, inter terminos locorum parium.

Sed in ſerie harmonicâ illud notare oportet, quod ſiquidem termini locorum imparium, excepto primo, ſubducantur ordine ex iis, quibus correſpondent inter termiuos locorum parium, nova oriatur ſeries, cujus ſumma eſt finita: quod ſanè in aliis ſeriebus, ubi idem paradoxum deprehenditur, locum non habet; quum in iſtis ſumma ejus ſeriei, quæ hac ratione oritur, ſit ſemper infinita. Eſt quippe hujuſmodi nova ſeries in ſerie harmonicâ $\frac{2}{4.6}+\frac{2}{8.10}+\frac{2}{12.14}+\frac{2}{16.18}+\frac{2}{20.22}$ &c., deſignantibus punctis interjectis mutuam numerorũ, inter quos interijciuntur, multiplicationem, ſive

etiam

etiam $\frac{1}{2.6} + \frac{1}{4.10} + \frac{1}{6.14} + \frac{1}{8.18} + \frac{1}{10.22}$ &c., cujus ſummam finitam eſſe, nemo non videt, quum ſit ſemiſſis iſtius $\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \frac{1}{8.9} + \frac{1}{10.11}$ &c., longè minoris hac aliâ $\frac{1}{2.2} + \frac{1}{4.4} + \frac{1}{6.6} + \frac{1}{8.8} + \frac{1}{10.10}$ &c., hoc eſt $\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \frac{1}{100}$ &c. Indeque ratio eſt repetenda, cur in ſerie harmonicâ, etſi quiſque terminorum in locis imparibus, excepto primo, minor ſit iis, quibus correſpondet inter terminos locorum parium, attamen ſumma tota terminorum in locis imparibus non minor, ſed æqualis ſit ſummæ terminorum in locis paribus, quia ſcilicet ab ea deficit per quantitatem finitam, quum tamen utraque ſumma ſit infinita.

Jam quotieſcumque poteſtates numerorum naturalium hujuſmodi ſunt, ut ex earum inverſione ſeries oriantur, quarum ſummæ ſint infinitæ (id, quod contingit, quum exponentes poteſtatum non

non ſunt majores unitate, ſemper patebit, quod quiſque terminus ex iis, qui ſunt in locis imparibus, excepto primo, minor ſit duobus iis, quibus correſpondet inter terminos locorum parium. Sed contrarium obtinere comperietur, quum poteſtates numerorum naturalium exponentes habent unitate majores, atque adeo inverſæ ſeries conſtituunt, quarum ſummæ ſunt finitæ. Hac ratione ſi poteſtates numerorum naturalium fuerint quadrata, ponendo, quod quiſque terminus locorum imparium ſit $\frac{1}{a^2}$, erunt termini, quibus ille correſpondet inter eos, qui ſunt in locis paribus, $\frac{1}{\overline{2a-2}^2}$, & $\frac{1}{4a^2}$: proindeque ratio illius ad hos alios duos erit, ut $16a^2 - 32a + 16$ ad $8a^2 - 8a + 4$, hoc eſt majoris ad minus.

Atque hinc modò facile etiam intelligimus veritatem alterius hujus paradoxi, quod ſumma terminorum in locis paribus ad ſummam terminorum omnium rationem habeat duplam in ſerie numerorum naturalium 1, 2, 3, 4, 5, 6,

Digitized by Google

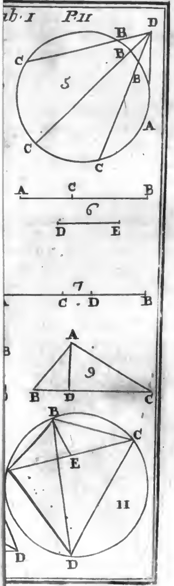
6, 7, 8, 9, 10 &c.; quadruplam in ſerie quadratorum 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, &c.; octuplam in ſerie cuborum 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000, &c., atque ita deinceps: nimirum, quia termini locorum parium conſtituuntur, ſumendo duplum cujuſque termini in ſerie numerorum naturalium, quadruplum in ſerie quadratorum, octuplum in ſerie cuborum, atque ita de aliis; adeoque tantùm abeſt, ut ſumma totius ſeriei excedat ſummam terminorum in locis paribus per ſummam ex terminis locorum imparium, ut potiùs illa iſtius pars aliquota, denominata à poteſtate binarii, ſimili iis, de quibus agitur, cenſenda ſit.

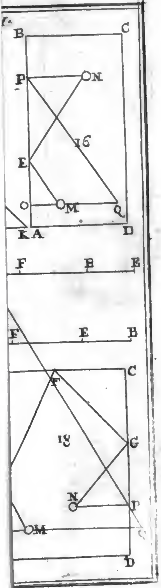
Neque verò quicquam movere Nos debet, quod termini locorum parium inter terminos locorum imparium exiſtant, adeoque veluti partes totius ſeriei nequeant ſimul ſumpti quantitatem conſtituere multiplicem illius. Nam ſi ita res eſſet, ſeries quadratorum, cuborum, aliarumque altiorum poteſtatum ex numeris naturalibus, minores eſſe deberent ipsâ ſerie numerorum naturalium; quia ſcilicet inter numeros naturales reperiuntur ipſorum tum quadrata, tum cubi,

bi, tum altiores poteſtates. Atque ita quoquè ſeries ex radicibus quadratis, radicibus cubicis, aliiſque radicibus ſuperioribus numerorum naturalium majores eſſe deberent ſerie, quam conſtituunt ipſi numeri naturales, quia ſcilicet iſti reperiuntur inter eorundemmet tum radices quadratas, tum radices cubicas, tum radices altioris ordinis.

Cæterùm, ut huic tandem Appendici finem imponamus, notabimus hoc loco methodum illam inveniendi ſummas finitas ſerierum per ſubductionem alicujus ſeriei, uno termino mutilatæ, à ſe ipſâ integrâ, eò redire, ut inter terminos ſeriei differentiæ capiantur. Unde ultrò conſequitur id, quod in calce capitis XI adnotavimus, nempè, quod ſumma ſeriei reliquæ ſit primus terminus ultimo minutus. Nam ſi fuerint quotcumque magnitudines a, b, c, d, e, f, g; manifeſtò liquet omnium differentias ſimul $a-b$, $b-c$, $c-d$, $d-e$, $e-f$, $f-g$ eſſe æquales $a-g$, hoc eſt primæ ultimâ minutæ. Quod quidem notandum hoc loco duximus, quia rationem hujus rei traditam citato loco, experientiâ edocti ſumus, non omnibus peræquè ſatisfacere.

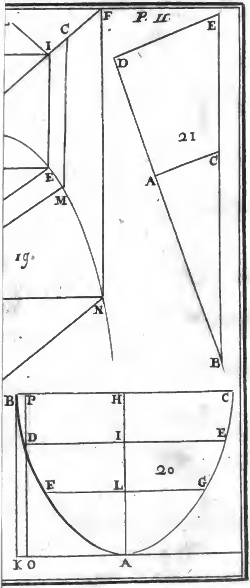
FINIS


ab·I P.II
5
6
7
9
11

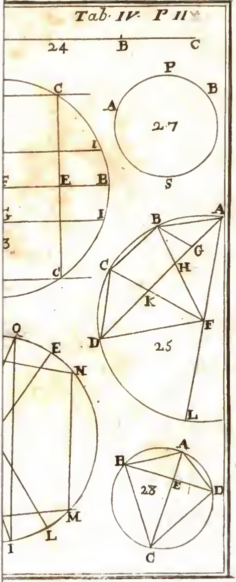


B
C
P
N
16
E
O
M
Q
K
A
D
F
B
E
F
E
B
C
F
18
G
N
P
M
D

Digitized by Google


P. II.
19.
20
21
F
C
I
E
M
N
D
E
A
C
B
B
P
H
C
D
I
E
F
L
G
K
O
A

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

005652894

Tom: 1-2 £4: 13: 4:

16